EXERCICE 1:

On définit la fonction f sur l'intervalle $\left[0;\pi^2\right]$ *par:* $f(x)=\cos\sqrt{x}$.

1. *a) Vérifier que pour tout réel* $x\in\left[0;\pi^2\right]$, $f(x)-1=-2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$.

b) Démontrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

2. *a) Justifier que f est dérivable sur* $\left[0;\pi^2\right]$ *et calculer* $f'(x)$.

   b) Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

3. *a) Résoudre dans* $\left[0;\pi^2\right]$ *I 'équation:* $f(x)=0$

   b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\frac{\pi^2}{4}$.

CORRECTION :

$f(x)=\cos\sqrt{x}\ ;\ \forall x\in\left[0;\pi^2\right]$

1. a) Pour tout réel $\forall x\in\left[0;\pi^2\right]$ *:*

$$\begin{aligned} f(x)&=\cos\sqrt{x}\\ &=\cos\left(2\times\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\\ &=1-2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\end{aligned}$$

Donc : $f(x)=1-2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$

On a utiliser $\left\langle\begin{aligned}\cos(2a)&=\cos^2a-\sin^2a\\ &=1-2\sin^2a\\ &=\cos^2a-1\end{aligned}\right.$

b)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}&=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)-1}{x}\\ &=\lim_{x\to0^+}-\frac{1}{2}\times\frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}\\ &=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

f est dérivable a droite en 0 et on $f'(0)=-\frac{1}{2}$

2. a) f est la composée des fonctions cosinus et racine carrée

Soit $u : x \mapsto \sqrt{x}$; $\forall x \in \left[0;\pi^2\right]$

■ *u est dérivable sur* $\left]0;\pi^2\right]$

■ $u\left(\left]0;\pi^2\right]\right) = \left]0;\pi\right]$

La fonction Cosinus est dérivable sur IR en particulier sur $\left]0;\pi\right]$

Donc f est dérivable sur $\left]0;\pi^2\right]$ *(c'est la composée de deux fonctions dérivables) et on a:*

$$\forall x \in \left[0;\pi^2\right] \quad f'(x) = u'(x) \times \left(-\sin\left(u(x)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \left(-\sin\sqrt{x}\right)$$
$$= \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$Ainsi\ \forall x \in \left[0;\pi^2\right] \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & si\ x \in \left]0;\pi^2\right] \\ -\dfrac{1}{2} & si\ x = 0 \end{cases}$$

b) Si $x \in \left]0;\pi^2\right]$ *alors* $0 < \sqrt{x} < \pi$ *; donc :* $\sin\sqrt{x} \geq 0$ *d'où* $f'(x) \leq 0$

<u>*Tableau de variation de f*</u>

x	0		π^2
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	-	0
$f(x)$	1	$\searrow$	-1

3. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\sqrt{x} = 0$ *et* $\sqrt{x} \in \left[0;\pi\right]$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi^2}{4}$$

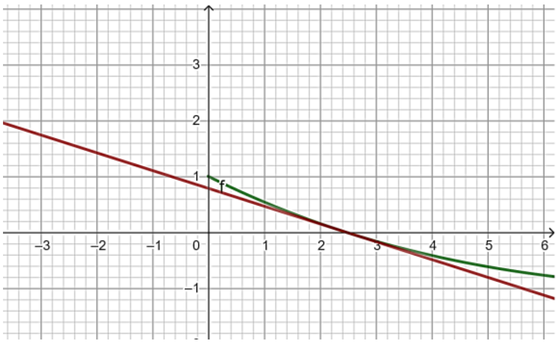
b) Soit (T) *la tangente à la courbe de f au point d'abscisse* $\frac{\pi^2}{4}$

$$(T) : y = f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\left(x - \frac{\pi^2}{4}\right) + f\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left(x - \frac{\pi^2}{4}\right)$$
$$= -\frac{1}{\pi}x + \frac{\pi}{4}$$

D'où : $(T) : y = -\frac{1}{\pi}x + \frac{\pi}{4}$

<u>Remarque:</u>

La courbe de f est donnée ci-dessous n'est pas demandée mais peut nous donner une idée sur le travail qu'on a fait.



EXERCICE 2

Calculer la limite en 0 de la fonction suivante : $\varphi(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$

CORRECTION **:**

Pour la fonction φ *il faut encadrer la fonction partie entière* $x \mapsto E\left(\frac{1}{x}\right)$ *. On rappelle que si* $y \in \mathbb{R}$ *, alors la partie entière de y satisfait* $E(y) \le y < E(y)+1$ *. Ce qui donne* $y-1 < E(y) \le y$ *. Donc pour tout* $y \in \mathbb{R}$ *tel que* $x \ne 0$ *on a :* $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{x}$

Nous allons calculer les limites à droite est à gauche de 0.
Soit $x > 0$ *.*
Par multiplication par x dans l'inégalité en haut, on a : $1-x < \varphi(x) \le 1$*.*
D'où la fonction φ *est encadrer par deux fonctions (* $x \mapsto 1-x$ *et la fonction constante égale à 1) qui tendent vers 1 quand* $x \to 0^+$*.*
Alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = 1$
De même si $x < 0$*, on a :* $1 < \varphi(x) \le 1-x$ *.*
Et donc : $\lim\limits_{x\to 0^-} \varphi(x) = 1$
Comme : $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \varphi(x) = 1$
Alors : $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 1.$

EXERCICE 3

Montrer que la fonctions suivante est prolongeable par continuité sur tout $\mathbb{R}$ *et* $[0;+\infty[$ *, respectivement:*

$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

CORRECTION **:**

Tout d'abord on rappelle que si une fonction u est définie sur I sauf en un point $x_0 \in I$ *, alors pour la prolongée en* x_0 *il faut s'assuré de deux choses: la continuité de u sur* $I - \{x_0\}$ *et l'existence de la limite* $\ell \in \mathbb{R}$ *de* $u(x)$ *quand* $x \to x_0$*. Dans ce cas on peut définir une fonction u continue sur tout II telle que*

$$u(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in I - \{x_0\} \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}.$$

La fonction u s'appelle le prolongement continu de u sur I.

La fonction $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}-\{0\}$ *(dans ce cas on a* $I=\mathbb{R}$ *et* $x_0=0$*).*

Pour que f soit prolongeable sur $\mathbb{R}$ *il faut qu'elle admet une limite en 0.*

En effet, comme $|\sin(y)|\leq 1$ *pour tout* $y\in\mathbb{R}$ *,alors en passant à la valeur absolue de f, on a pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$ *:* $|f(x)|\leq|x|$.

Donc $-|x|\leq f(x)\leq|x|$ *et comme* $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ *, alors* $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$*. Ainsi f est prolongeable sur* $\mathbb{R}$ *et son prolongement* f *est donné par :* $f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

<u>EXERCICE 4</u>

Montrer que pour tout $x>0$ *on a :* $\arctan(x)>\frac{x^2}{1+x^2}$.

<u>CORRECTION</u> :

Soit la fonction $f:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ *définie par :* $f(x)=\arctan(x)-\frac{x^2}{1+x^2}$ *;* $x>0$.

Cette fonction est dérivable sur $]0;+\infty[$ *car c'est le quotient et la somme des fonctions dérivables sur* $]0;+\infty[$.

De plus on a pour tout $x>0$.

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x\left(1+x^2\right)-x^2(2x)}{\left(1+x^2\right)^2} \\ &=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \\ &=\frac{1}{1+x^2}\times\frac{(x-1)^2}{\left(1+x^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $f'(x)>0$ *pour tout* $x>0$ *. Ainsi f est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$ *. Donc :*

$x>0\Rightarrow f(x)>f(0)$

ce qu'il fallait démontrer

<u>EXERCICE 5</u>

Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *la fonction définie par :* $g(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{x} & si\ \ x\neq 0 \\ 1 & si\ \ x=0\end{cases}$

1− Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$ *;* $x-\frac{x^3}{6}\leq\sin x\leq x$.

2− Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ *et donner l'expression de sa fonction dérivée sur* $\mathbb{R}^*$.

3−Etudier la dérivabilité de g en 0 .

4− Montrer que la fonction g' *est continue sur* $\mathbb{R}$.

<u>CORRECTION</u> :

1− ■ Soit la fonction h définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *par :* $h(x)=\sin x-x$.

H est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et* $\forall x\in\mathbb{R}$ *:* $h'(x)=\cos x-1$.

D'où : $\left(\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$: $h'(x)\leq 0$.

Donc : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$/ $h(0)\leq \sin x - x \Rightarrow \sin x\leq x$ *(car* $h(0)=0$ *)*

Pour $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ *; on remarque que h est impaire ; donc :*

$$h(0)\leq \sin(-x)-x\Rightarrow 0\leq \sin(-x)-x$$
$$\Rightarrow x\leq \sin x$$

■ *Soit la fonction* ψ *définie sur* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *par :* $\psi(x)=\sin x - x+\frac{x^3}{6}$

ψ *est dérivable sur* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *est* $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *;*

on a : $\psi'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$.

Etudions le signe de ψ' *:*

la fonction ψ' *est dérivable sur* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *;*

on a : $\psi''(x)=-\sin x + x$ *et d'après ce qui précède on a :* $\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$; $\sin x\leq x$.

Donc ψ' *est croissante sur* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *et comme elle est paire alors* ψ' *est décroissante sur* $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

D'où $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $\psi'(x)\geq\psi'(0)\Rightarrow\psi'(x)\geq 0$ (car $\psi'(0)=0$).

Par suite ψ est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *;d'où :* $\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$;

$$\psi(x)\geq\psi(0)\Rightarrow \sin x - x+\frac{x^3}{6}\geq 0$$
$$\Rightarrow -x+\frac{x^3}{6}\leq \sin x$$

Et $\left(\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]\right)$; $\psi(x)\leq\psi(0)\Rightarrow \sin x - x+\frac{x^3}{6}\leq 0$

$$\Rightarrow \sin x\leq -x+\frac{x^3}{6}$$

2− La fonction $x\mapsto\frac{\sin(x)}{x}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *comme quotient de deux fonctions dérivables.*

De plus pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ *on a :* $g'(x)=\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$.

3- D'autre part, pour tout $x\neq 0$ *on a :*

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x}$$
$$=\frac{\sin(x)-x}{x^2}$$

On sait que (d'après la question 1)) que : $(x\in\mathbb{R}^*)$; $x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x$

Donc : $-\frac{x}{6} \leq \frac{\sin(x)-x}{x^2} \leq 0$.

D'où : $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = 0$

Et à gauche de 0 on posera : $t=-x$ *; donc :* $t-\frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t \Rightarrow (-t)+\frac{t^3}{6} \geq -\sin t \geq (-t)$

$$\Rightarrow (-t)+\frac{t^3}{6} \geq \sin(-t) \geq (-t)$$

$$\Rightarrow x+\frac{x^3}{6} \geq \sin x \geq x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{6} \geq \frac{\sin x - x}{x^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\sin x - x}{x^2} \leq \frac{x}{6}$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\sin(t)-t}{t^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = 0$$

Donc g est dérivable en 0 *et* $g'(0)=0$.

Donc la fonction dérivée g' *est donnée par :*

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$$

4− Comme la fonction $x \mapsto \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *(car c'est le quotient de deux fonctions continues), alors la fonction dérivée* g' *est continue sur* $\mathbb{R}^*$.

Maintenant étudions la continuité de g' *au point 0. Pour tout réel* $x \neq 0$*, on a :*

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} \\ &= \frac{x\cos(x)-x-\sin(x)+x}{x^2} \\ &= \frac{x\cos(x)-x}{x^2} - \frac{\sin(x)-x}{x^2} \\ &= x \times \frac{\cos(x)-1}{x^2} - \frac{\sin(x)-x}{x^2} \end{aligned}.$$

Or : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = 0$ *; d'après ce qui précède et* $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Donc : $\lim_{x\to 0} g'(x) = 0$ *et* $g'(x)=0$

Ce qui implique que g' *est aussi continue en 0, donc sur* $\mathbb{R}$