A) Lois de composition internes

1. Définition et exemples

Définition

– Soit E un ensemble. Une loi de composition interne sur E est une application de E × E dans E. Si on la note : $\begin{cases} E \times E \to E \\ (a,\, b) \mapsto a*b \end{cases}$, on dit que $a*b$ est le composé de a et b pour la loi $*$.

Exemples

• Sur $E=\mathbb{Z}$, l'addition définie par $\begin{cases} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \\ (a,b)\mapsto a+b \end{cases}$, la multiplication $\begin{cases} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \\ (a,b)\mapsto a\times b \end{cases}$ et la soustraction $\begin{cases} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \\ (a,b)\mapsto a-b \end{cases}$ sont des lois de composition interne dans $\mathbb{Z}$.

1.2. Propriétés usuelles des lois internes

Définition1

– Soit $*$ une loi de composition interne sur un ensemble E. On dit que :
1 – la loi $*$ est commutative si pour tous les éléments x, y de E, on a : $(x*y=y*x)$.
2 – la loi $*$ est associative si pour tous les éléments x, y, z de E, on a : $((x*y)*z=x*(y*z))$.

Exemples

• L'addition et la multiplication dans $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont commutatives et associatives. Ce n'est pas le cas de la soustraction.
• La composition des applications dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est associative, mais n'est pas commutative

Définition2

Soit $*$ une loi de composition interne sur un ensemble E.
On dit que F est une partie stable de E pour $*$ si : $\left(\forall(x,y)\in F^2\right)$: $(x*y)\in F$

Définition 3

– Soit $*$ une loi interne sur un ensemble E. Un élément e de E est un élément neutre pour la loi $*$ si pour tout élément a de E on a : $(a*e=e*a=a)$.

Définition 4

– Soit $*$ une loi interne sur un ensemble E, possédant un élément neutre e et soit a un élément de E. On dit que a admet un symétrique b pour la loi $*$, si l'on a : $(a*b=b*a=e)$.

Définition 5

– Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes, notées $\top$ *et* $*$*. On dit que* $*$ *est distributive par rapport à* $\top$ *si pour tous les éléments x, y, z de E, on a :* $x*(y\top z)=(x*y)\top(x*z)$ *et* $(x\top y)*z=(x*z)\top(y*z))$.

B)GROUPE

– Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$*. On dit que* $(E,*)$ *est un groupe si la loi* $*$ *satisfait aux trois conditions suivantes :*

1 – Elle est associative.

2 – Elle admet un élément neutre dans E.

3 – Chaque élément de E est symétrisable dans E (càd :admet un symétrique pour $*$*).*

Si de plus, la loi $*$ *est commutative, on dit que le groupe est commutatif*

Propriété caractéristique d'un sous groupe :

Soit $(G,*)$ *un groupe . Une partie non vide E de G est un sous-groupe pour la loi* $*$ *ssi :*

1) $E\subset G$ *et* $E\neq\varnothing$

2) $\forall(x,y)\in E^2$, $x*y\in E$ *(E est une partie Stable)*

3) $\forall x\in E$, $x'\in E$ *(où* x' *est le symétrique de x dans* $(G,*)$*).*

Equivaut aussi à : $\begin{cases}\forall(x,y)\in E^2\ ,\ x*y\in E\\ \forall(x;y)\in E\ ;x*y'\in E\quad (\text{ où } y' \text{ est le symétrique de } y \text{ dans}(G,*))\ .\end{cases}$

C) HOMOMORPHISME-ISOMORPHISME

1) HOMOMORPHISME :

Définition :

Soient E et F deux ensembles munis respectivement de deux lois de compositions internes $*$ *et* $\top$ *.*

Et soit f *une application de E vers F .*

On dit que f *est un homomorphisme de* $(E,*)$ *vers* $(F,\top)$ *si :* $\forall(x,y)\in E^2$ *:* $f(x*y)=f(x)\top f(y)$

Exemples :

- *L'application ln est un homomorphisme de* $(]0,+\infty[,\times)$ *vers* $(\mathbb{R},+)$
- *L'application exp est un homomorphisme de* $(\mathbb{R},+)$ *vers* $(]0,+\infty[,\times)$
- *L'application* $x\mapsto ax$ *(* $a\in\mathbb{R}$ *) est un homomorphisme de* $(\mathbb{R},+)$ *vers* $(\mathbb{R},+)$
- *L'application* $x\mapsto a^x$ *(* $a\in\mathbb{R}^{+*}$ *) est un homomorphisme de* $(\mathbb{R},+)$ *vers* $(\mathbb{R},\times)$

Propriétés

Soit f un homomorphisme de $(E,*)$ vers $(F,\top)$

L'homomorphisme f transfère les propriétés de $(E,*)$ dans $(f(E),\top)$

Remarque :

Si f un homomorphisme surjectif de $(E,*)$ vers $(F,\top)$, et $(E,*)$ est un groupe , alors $(F,\top)$ est un groupe .

2) **ISOMOMORPHISME :**

Définition :
Soient E et F deux ensembles munis respectivement de deux lois de compositions internes $*$ *et* T .
Et soit f *une application de E vers F .*
On dit que f *est un isomorphisme de* $(\mathrm{E},*)$ *vers* (F,T) *si* f *est un homomorphisme bijectif.*
Exemples :

- *L'application ln est un isomorphisme de* $(]0,+\infty[,\times)$ *vers* $(\mathbb{R},+)$
- *L'application exp est un isomorphisme de* $(\mathbb{R},+)$ *vers* $(]0,+\infty[,\times)$
- *L'application* $x \mapsto ax\ (a \in \mathbb{R}^*)$ *est un isomorphisme de* $(\mathbb{R},+)$ *vers* $(\mathbb{R},+)$
- *L'application* $x \mapsto a^x\ (a \in \mathbb{R}^{+*})$ *est un isomorphisme de* $(\mathbb{R},+)$ *vers* $(]0,+\infty[,\times)$

Propriétés
Soit f un isomorphisme de $(\mathrm{E},*)$ vers (F,T)

- *L'isomorphisme* f *transfère les propriétés de* $(\mathrm{E},*)$ *dans* (F,T)
- *Si* $(\mathrm{E},*)$ *est un groupe , alors* (F,T) *est un groupe*
- *Si* $(\mathrm{E},*)$ *est un groupe commutatif , alors* (F,T) *est un groupe commutatif*

D) ANNEAUX – CORPS :

1) ANNEAUX

Soit A un ensemble muni de deux L .C.I : $*$ *et* T

$$(\mathrm{A};*,\mathrm{T}) \text{ est un anneau} \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathrm{A};*) \text{ est un groupe commutatif} \\ \mathrm{T} \text{ est associative dans } \mathrm{A} \\ \mathrm{T} \text{ est distributive par rappor à } * \text{ dans } \mathrm{A} \end{cases}$$

Et si de pus T *est commutative dans A , alors on dit que* $(\mathrm{A};*,\mathrm{T})$ *est un anneau commutatif*

Si T *admet un élément neutre dans A , alors on dit que* $(\mathrm{A};*,\mathrm{T})$ *est un anneau unitaire*

Les diviseurs de zéro d'un anneau :

Soit $(\mathrm{A};*,\mathrm{T})$ *un anneau de zéro e (e est l'élément neutre de* $(\mathrm{A};*)$ *)*

On dit que $a \in \mathrm{A}-\{e\}$ *est un diviseur de zéro pour l'anneau* $(\mathrm{A};*,\mathrm{T})$ *, si :*

$$\exists b \in A\text{-}\{e\}\quad,\ aTb = e \text{ ou } bTa = e$$

ANNEAU INTEGRE:

On dit que l'anneau $(A;*,T)$ *est INTEGRE, s'il n'admet pas de diviseurs de zéro,*

Autrement dit : $\left(\forall(a,b)\in A^2\right)\ :\ \left[aTb=e\Rightarrow a=e\ ou\ b=e\right]$

Exemple et contre-exemple :

$(\mathbb{Z};+,\times);(\mathbb{Q};+,\times);(\mathbb{R};+,\times);(\mathbb{C};+,\times)$ *sont des anneaux intègres , tandis que :*
$(M_2(\mathbb{R});+,\times);(M_3(\mathbb{R});+,\times)$ *sont des anneaux non intègres*

2) ***CORPS*** *: soit A un ensemble muni de deux L .C.I :* $*$ *et* T

$$(A;*,T)\text{ est un corps}\Leftrightarrow\begin{cases}\bullet(A;*,T)\ \textit{est un anneau unitaire de zéro } e\\ \quad(\textit{e est l'élément neutre de }(A;*))\\ \bullet\textit{Tout élément de } A-\{e\}, \textit{est symétrisable dans } A\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\bullet(A;*)\ \textit{est un groupe commutatif}\\ \qquad \textit{d'élément neutre } e\\ \bullet(A^*;T)\ \textit{est un groupe} \ (\ A^*=A-\{e\}\ )\\ \bullet T\ \textit{est distributive par rappor à } * \textit{ dans } A\end{cases}$$

Et si de plus T est commutative dans A, on dit que $(A;*,T)$ est un corps commutatif.

Propriété :

$(A;*,T)$ est un corps $\Rightarrow$ $(A;*,T)$ est un anneau intègre.

E) Espace vectoriel réel

1) ***Loi de composition externe***

Définition

Étant donnés deux ensembles E et G (non vides), toute application f de E × G vers G est appelée loi de composition externe sur G à composante dans E ; noté : $\bullet$.
L'image de (α,x) *par f est noté :* $f(\alpha,x)=\alpha\bullet x$.

Exemples

1) $\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\left(\alpha,\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\right)\mapsto\alpha\bullet\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a&\alpha c\\\alpha b&\alpha d\end{pmatrix}$$

2) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

$\left(\alpha,(x,y)\right)\mapsto\alpha\bullet(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$

3) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$(\alpha,x)\mapsto\alpha\bullet x=\alpha x$

4) $\mathbb{R}\times\mathcal{F}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\to\mathcal{F}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *($\mathcal{F}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.)*

$(\alpha,f)\mapsto\alpha\bullet f\,/\,(\forall x\in\mathbb{R}):(\alpha\bullet f)(x)=\alpha f(x)$

2) ***Espace vectoriel réel***

Définition

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne notée +et d'une loi de composition externe notée$\bullet$.

On dit que $(E,+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel (e.v.r) si :

1) $(E,+)$ *est un groupe commutatif.*
2) *Pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et tout $(x,y)\in E^2$ on a :*
   - $\alpha\bullet(x+y)=\alpha\bullet x+\alpha\bullet y$
   - $(\alpha+\beta)\bullet x=\alpha\bullet x+\beta\bullet x$
   - $\alpha\bullet(\beta\bullet x)=(\alpha\beta)\bullet x$
   - $1\bullet x=x$

Attention

Ne pas considérer que toutes les lois de composition externe satisfait la 4iéme condition ; exemple :

$\mathbb{N}^*\times]0;+\infty[\to]0;+\infty[$

$(\alpha,x)\mapsto\alpha\bullet x=\alpha^x\quad(\alpha^x=e^{x\ln\alpha})\qquad 1\bullet x=1^x=1\neq x\qquad(si\ \ x\neq1)$

Remarque

Les éléments de E s'appellent des vecteurs et les éléments de $\mathbb{R}$ s'appellent des scalaires .

Exemples

a) $(\mathbb{R},+,\bullet)$; $(\mathbb{C},+,\bullet)$; $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$; $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\bullet)$; $(\mathcal{F}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}),+,\bullet)$ *et* $(\mathbb{R}_n[X],+,\bullet)$ *(ensemble des polynômes de degré inferieur à n) sont des (e.v.r).*

b) $(\mathbb{R}^n,+,\bullet)$ *est un e.v.r* $(n\in\mathbb{N}^*)$

c) $(V_2,+,\bullet)$ *et* $(V_3,+,\bullet)$ *sont des e.v.r.*

3) ***Règles de Calcul dans un e.v.r***

Soit $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel e.v.r et soit $(\vec{x},\vec{y})\in E^2$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

- $\alpha\bullet\vec{x}=\vec{0}\Rightarrow\alpha=0$ *ou* $\vec{x}=\vec{0}$
- $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}\Rightarrow\ \vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$
- $\alpha\bullet(\vec{x}-\vec{y})=\alpha\bullet\vec{x}-\alpha\bullet\vec{y}$

4) ***Sous-Espace vectoriel***

Définition

Soit $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel e.v.r et F une partie non vide de E .

On dit que $(F,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel (s.e.v)de E, si $(F,+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel (e.v.r).

Propriété : *(Caractérisation d'un s.e.v)*

Soit $(E,+,\cdot)$ un e.v.r

$$(F,+,\cdot) \text{ est un s.e.v de } E \Leftrightarrow \begin{cases} \neg\, F \neq \varnothing \text{ et } F \subset E \\ \neg\, F \text{ est stable pour } + \text{ càd} \\ \quad \forall (x,y) \in F ; (x+y) \in F \\ \neg\, F \text{ est stable pour } \cdot \text{ càd} \\ (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in F) ; \ \alpha \cdot x \in F \end{cases}$$

$$\underline{\textbf{Important}} \Leftrightarrow \begin{cases} \neg\, F \neq \varnothing \text{ et } F \subset E \\ \neg\, \left(\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right), \left(\forall (x,y) \in F^2\right) \\ \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F \end{cases}$$

Remarques

- *Tout s.e.v d'un e.v.r est un e.v.r.*
- *Si $\vec{0} \notin F$ alors $(F,+,\cdot)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*

Exemples²

Soit $E = \{(x,y) / x - 2y = 0\}$

Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un s.e.v de $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.

Solution :

- *On a : $E \subset \mathbb{R}^2$ et $E \neq \varnothing$ (car $0 - 2\cdot 0 = 0$ donc $(0,0) \in E$).*
- *Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $((x,y);(x',y')) \in E^2$*

$$\alpha\cdot(x,y) + \beta\cdot(x',y') = (\alpha\cdot x, \alpha\cdot y) + (\beta\cdot x', \beta\cdot y')$$
$$= (\alpha\cdot x + \beta\cdot x', \alpha\cdot y + \beta\cdot y')$$

Et $\alpha\cdot x + \beta\cdot x' - 2(\alpha\cdot y + \beta\cdot y') = \alpha\cdot x - 2\alpha\cdot y + \beta\cdot x' - 2\beta\cdot y'$

$$= \alpha\cdot\underbrace{(x-2y)}_{=0} + \beta\cdot\underbrace{(x'-2y')}_{=0}$$

$$= 0$$

Donc : $\alpha\cdot(x,y) + \beta\cdot(x',y') \in E$

Alors $(E,+,\cdot)$ est un s.e.v de $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.

Application

Soit $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un S.E.V de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

Solution

■ *On a :* $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *et* $E \neq \varnothing$ *(car* $M(0,0) \in E$ *).*

■ *Soit* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\left(M(x,y);M(x',y')\right) \in E^2$

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot M(x,y) + \beta \cdot M(x',y') &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} x & 2y \\ -y & x \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} x' & 2y' \\ -y' & x' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha \cdot x & 2\alpha \cdot y \\ -\alpha \cdot y & \alpha \cdot x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \cdot x' & 2\beta \cdot y' \\ -\beta \cdot y' & \beta \cdot x' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha \cdot x + \beta \cdot x' & 2\alpha \cdot y + 2\beta \cdot y' \\ -\alpha \cdot y - \beta \cdot y' & \alpha \cdot x + \beta \cdot x' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha \cdot x + \beta \cdot x' & 2(\alpha \cdot y + \beta \cdot y') \\ -(\alpha \cdot y + \beta \cdot y') & \alpha \cdot x + \beta \cdot x' \end{pmatrix} \\
&= M(\alpha \cdot x + \beta \cdot x', \alpha \cdot y + \beta \cdot y')
\end{aligned}$$

Donc $\left(\alpha \cdot M(x,y) + \beta \cdot M(x',y')\right) \in E$; *car* $(\alpha \cdot x + \beta \cdot x', \alpha \cdot y + \beta \cdot y') \in \mathbb{R}^2$

Alors $(E,+,\cdot)$ *est un S.E.V de* $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot\right)$.

Remarque 1

Si on veut montrer que $(E,+,\cdot)$ *est un e.v.r ; on démontre que* $(E,+,\cdot)$ *est un s.e. v de* $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot\right)$.

Remarque 1

Si on veut montrer que $(E,+,*)$ *est un Anneau (ou Corps),on utilise le fait que* $(E,+,\cdot)$ *est un s.e. v, donc* $(E,+)$ *est un groupe commutatif.*