Produit Scalaire :

Prof : Radouane –Niv : T.C.S :

Résumé de cours :

I) ***Produit scalaire :***

1) ***Définitions et propriétés :***

a) ***Le produit scalaire de 2 vecteurs colinéaires :***

Définition 1 :

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ *(même sens)*

b) ***En utilisant la projection orthogonale :***

Définition 2 :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$ *(C' est le projeté orthogonal du point C sur (AB)).*

c) ***L'expression trigo du produit scalaire :***

Définition 3 :

$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}}$

Ou $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)}$

d) ***Orthogonalité de 2 vecteurs :***

$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \text{ signifie que } \vec{u}.\vec{v} = 0}$

e) ***Propriétés du produit scalaire :***

* $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

* $\left(\vec{u} + \vec{v}\right).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

Et $\left(k.\vec{u}\right).\vec{v} = \vec{u}\left(k.\vec{v}\right) = k\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$

* $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$

Remarque :

$$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right]$$

II) Applications du produit scalaire :

1) Les relations métriques dans un triangle rectangle :

Propriété :

Si ABC est un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC) ; alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} BC^2=AB^2+AC^2;BA^2=BH\times BC; \\ CA^2=CH\times CB;AH^2=HB\times HC \end{array}}$$

2) Théorème d'Alkashi :

Théorème :

Dans tout triangle ABC avec AB=c ;AC=b et BC=a

$$\boxed{BC^2=BA^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos A}$$

$$a^2=c^2+b^2-2cb\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=b^2+a^2-2ba\cos C$$

3) Théorème de la médiane :

Théorème :

AMB un triangle et I milieu de $[AB]$

$$\boxed{MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2}$$