Exercice 1

I- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-2z+2=0$

II- On considère dans le plan complexe munie d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$; les points A ; B et C d'affixes respectives : $z_A=-\sqrt{2}$; $z_B=1+i$ et $z_C=1-i$.

1 - Placer les points A ; B et C dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

2- a - Déterminer le module et l'argument $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$

b - Déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$.

3- a - Déterminer la forme algébrique puis une forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{z_A-z_B}{z_A}$

b - Déduire : $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$

Exercice 2 :

Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$; on considère le point $A(0;1;0)$; les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ et les droites $D(O;\vec{u})$ et $D'(A;\vec{v})$

1) Déterminer une représentation paramétrique pour chacune des droites D et D'.

2) Soit E un point de D' d'abscisse −1.

a) Déterminer les coordonnées de E.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à la droite D' en E.

c) Calculer la distance du point A au plan P.

3) Soit F un point de D d'abscisse m. (m un paramètre réel)

a) Déterminer les coordonnées de F en fonction de m.

b) déterminer une équation cartésienne du plan Q_m perpendiculaire à la droite D en F.

c) calculer la distance du point A au plan Q_m en fonction de m.

4) a) montrer que P et Q_m sont perpendiculaires.

b) déterminer la distance du point A à la droite d'intersection de P et Q_m en fonction de m.

Exercice 3 :

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher. 2 Boules blanches, 3 boules rouges et 3 boules vertes. On tire successivement et sans remise 2 boules du sac.

1) On considère les deux événements.

A : « Obtenir au moins une boule blanche»

B : « les deux boules tirées sont de même couleur »

Montrer que : $p(A)=\dfrac{13}{28}$ et $p(B)=\dfrac{1}{4}$.

2) Soit X la variable aléatoire liée au nombre de boules blanches tirées.

a) Montrer que $p(X=2)=\dfrac{1}{28}$.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Problème :

1ère partie :

On considère les fonctions g et h définies sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x-1-\ln x$ et $h(x)=x+(x-2)\ln x$.

1 - a – Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$, puis étudier les variations de g.

b – Déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $g(x)\geq 0$

2 - a – Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$

b – Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $(x-1)\ln x\geq 0$

3 - Déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $h(x)>0$

2ème partie :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$.

Et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 - a – Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; puis interpréter le résultat géométriquement le résultat.

b – Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $f(x)=1+x\ln x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$

c – Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis déterminer la branche infinie de La courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2 - a – Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$

b – déduire que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

3- Soit (Δ) la droite tangente à la courbe (C_f) au point $(1;1)$.

a – Montrer que : $y=x$ est une équation de la droite (Δ)

b – Vérifier que : $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right)$; $f(x)-x=(\ln x-1)g(x)$

c – Etudier le signe de $f(x)-x$, puis déduire la position relative de la droite(Δ) et la courbe (C_f)

4 - Tracer la droite(Δ) et la courbe (C_f)dans le repère orthonormé$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.(On admet que (C_f)admet un point d'inflexion d'abscisse compris entre 1 et 1,5)

3ème partie :

La suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $\begin{cases} u_0=\sqrt{e} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$;$(\forall n\in IN)$

1– Montrer que : $(\forall n\in IN)$; $1<u_n<e$

2– Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$est décroissante.

3- Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$est convergente et déterminer sa limite.