# *Exercices série n°9 sur les fonctions logarithmes*

## *2éme Bac Sc.Eco*

### *Exercice1*

***Partie A: Questions de cours***

*1) Etudier le signe de* $\ln x$

*2) Donner les limites :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$

***Partie B:***

*On considère la fonction f définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ .

*On note* $(\mathcal{C})$ *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

*1) Calculer* $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ *; Interpréter graphiquement le résultat*

*2) Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ *; Interpréter graphiquement le résultat*

*3) a) Montrer que pour tout* $x\in]0;+\infty[$ ; $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$

*b) Dresser le tableau de variation de f*

*4) a) Montrer que l'équation* $f(x)=0$ *admet une solution unique* $\alpha$ *sur* $]0;+\infty[$

*b) Donner un encadrement de* $\alpha$ *à* $10^{-1}$ *près.*

*5) Tracer la courbe e dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$

### Exercice 2

*On considère la fonction f définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=1+\frac{\ln x}{x}$.

*Soit* $(\mathcal{C})$ *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$, *(unité graphique* $5$ *cm ).*

*1) Calculer* $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. *Déterminer les asymptotes de* $(\mathcal{C})$.

*2) Dresser le tableau des variations de f*

*3) a) Montrer que l'équation* $f(x)=0$ *admet une solution unique sur l'intervalle* $\left[\frac{1}{e};1\right]$ *, notée* $\alpha$ .

*b) Déterminer un encadrement de* $\alpha$ *d'amplitude* $10^{-1}$.

*c) Donner, suivant les valeurs de x, le signe de* $f(x)$ *sur* $]0;+\infty[$.

*4) Tracer la courbe* $(\mathcal{C})$

### *Exercice 3*

*Soit f la fonction définie sur l'intervalle* $]1;+\infty[$ *par :* $f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}$

*On note* $(\mathcal{C})$ *la courbe représentative de f et* $(\Gamma)$ *la courbe d'équation* $y=\ln x$ *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

*1) Etudier les variations de la fonction f et calculer* $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) a) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \left[ f(x) - \ln x \right]$

b) Etudier la positions relative de $(\mathcal{C})$ et de $(\Gamma)$.

3) On se propose de chercher les tangentes à la courbe passant par le point $O$.

a) Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$ ; montrer que la tangente $T_a$ à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.

b) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

Montrer que sur $]1;+\infty[$ les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.

d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $(\mathcal{C})$ passant par le point $O$.