

Exercice 01:

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{(x+2)\sqrt{1-x}+2}{x+3}$.

- 1) a) Déterminer D_f .
- 6) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en $x_0 = -3$?

Exercice 02:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x \left(1 - E\left(\frac{1}{x}\right) \right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue en $a = 0$.
- 2) a) Etudier la continuité de f à droite et à gauche en $b = 1$.
b) La fonction est-elle continue en $b = 1$? Justifier la réponse.
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Exercice 03:

Soit $m \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{mx-1}{x^2+2} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{x^2-5x+10}-2}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- 1). Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty; 2]$ et $]2; +\infty[$.
- 3) la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.

Exercice 04:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + x^2 + ax - 2$ Où $a \in \mathbb{R}^{**}$.

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-1; 2]$.
- 2) La solution de l'équation précédente est-elle unique ? Justifier la réponse.

Exercice 05 :

Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[0; 1]$ tels que : $f([0; 1]) \subset]1; +\infty[$.

Montrer que : $(\exists ! c \in]0; 1[) / f(c) = \frac{1}{\sqrt{c}}$

Exercice 06 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0]$ par : $f(x) = x + 2$

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- b) Justifier que la fonction f est continue sur I .
- 2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = \left[-\frac{3}{2}; 1\right[$

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ Pour tout $x \in J$.

3) a) Montrer que l'équation (E): $x^3 - x^2 + 2x + 3 = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$ notée a tels que :

$$-1 < a < -\frac{1}{2}$$

b) Prouver que : $f^{-1}(a) = f(a)$.

Exercice 07:

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$ par : $(\forall x \in I) ; f(x) = x^2 + x + 2 - 2x\sqrt{x}$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que : $(\forall x \in I) ; f'(x) = (\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 1)$.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = [2; +\infty[$.

3) Montrer que : $(\exists ! a \in]1; +\infty[) ; a^2 + a = 3 + 2a\sqrt{a}$

4) a) Montrer que : $(\forall x \in J) ; f^{-1}(x) = \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{x-2}} \right)^2$.

b) En déduire que : $a = \frac{1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$

Exercice 08 :

Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty; 0]$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x-1}$

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; 0]) ; f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2 \sqrt{x^2 - 2x}}$

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Déterminer f^{-1} Pour tout $x \in J$.

3) Soit g la fonction définie sur $K = \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$ par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{f^{-1}(\cos(2x))} & \text{si } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue sur K .

b) Montrer que : $(\forall x \in K) ; g(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(2x) - 1}$

c) Montrer que g est une bijection de K vers un intervalle L que l'on déterminera puis calculer Pour tout $x \in L$.

Exercice 09 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

1) a) Dresser le tableau de variation complet de f .

b) Déterminer $f([1; +\infty[)$ et $f(]-\infty; 1])$.

2) a) Montrer que l'équation (E): $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

Puis Justifier que : $2 < \alpha < 3$.

b) Prouver que : $\alpha = a + \frac{1}{a}$ où $a = \frac{\sqrt[3]{12 + 4\sqrt{5}}}{2}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (F): $\text{Arctan}\left(\sqrt[3]{\tan^3 x - 3\tan x}\right) = \frac{\pi}{3}$

Exercice 10 :

✓ Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel a l'ensemble des solutions de l'inéquation $(I) : \sqrt[3]{1+(3+x)}\sqrt{x+3x} - \sqrt[3]{1-(3+x)}\sqrt{x+3x} \geq x+a$.

Exercice 11:

1) Montrer que : $\left(\forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\right] ; \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3} \tan x < x$

2) En déduire que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^* \right) ; 0 < \frac{\text{Arctan } x}{x} < \frac{2 + \sqrt{1+x^2}}{3\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 12:

On pose : $\alpha = \text{Arctan } a$ et $\beta = \text{Arctan } b$ Où $a, b \in \mathbb{R}$ et $ab < 1$.

1) a) Montrer que : $\cos(\alpha + \beta) = (1 - ab) \cos \alpha \cos \beta$.

6) En déduire que : $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$

2) Montrer que : $\text{Arctan } a + \text{Arctan } b = \text{Arctan} \left(\frac{a+b}{1-ab} \right)$

3) a) Calculer $\text{Arctan } 2 + \text{Arctan } 5 + \text{Arctan } 8$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4} + \text{Arctan} \left(\frac{x}{1-x} \right) \right)$

Exercice 13:

Soit f la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, par : $f(x) = \frac{1}{2\cos x}$

1) a) Montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera

b) Calculer $f^{-1}(x)$ Pour tout $x \in J$.

2) On considère la fonction g définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, par : $g(x) = \sin x - 2 \cos^2 x$.

a) Dresser le tableau de variation de

b) En déduire que l'équation $(E) : g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$; telle que : $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

3) On pose : $h(x) = f(x) - x$ Pour tout $x \in I$.

a) Dresser le tableau de variation de h . Puis montrer que $h(\alpha) < 0$.

b) En déduire que l'équation $(F) : h(x) = 0$ admet exactement deux solutions

β_1 et β_2 tels que : $\frac{\pi}{6} < \beta_1 < \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3} < \beta_2 < \frac{5\pi}{12}$

c) Dresser le tableau de signe de h sur l'intervalle I .