

guessmaths

Série n° 6 d'exercices sur « étude de fonctions logarithmes » Terminale S

Exercice 1

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x$.

1. Déterminer les limites de g à droite en 0 et $+\infty$.

2. Soit g' la dérivée de g .

Montrer que : $g'(x) = \frac{2x^2 + 3x + 4}{x}$ dresser le tableau de variations de g sur $]0; +\infty[$.

3. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$

On appelle (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 3 cm).

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f à droite en 0 ; on remarquera que : $f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x$.

Que peut-on en déduire ?

2. a. Montrer que pour tout x strictement positif : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b. En utilisant les résultats de **la partie A**, étudier les variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$

c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x$

Donner les solutions dans l'intervalle $]0; +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$.

4. Tracer (C_f) et la droite d'équation $y = x$.

5. Interpréter graphiquement le résultat de la question 3.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3x \ln x - 2(\ln x)^2 \text{ est une primitive de } f \text{ sur l'intervalle }]0; +\infty[.$$

2. On considère dans le plan le domaine (D) délimité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

a. Hachurer le domaine (D) .

b. Calculer l'aire du domaine (D) en unités d'aires puis en cm^2 .

On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au mm^2 près

Exercice 2

Partie A

1. a. Résoudre dans l'ensemble R des nombres réels l'équation : $2X^2 - 5X + 2 = 0$.

b. En déduire les solutions, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, de l'équation $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$.

On pourra poser $X = \ln x$.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2$.

Soit C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Etudier la limite de f à droite en 0. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{4\ln x - 5}{x}$

b. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

c. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3. Donner une équation de la tangente T et la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

4. Tracer C et T dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

5. a. Hachurer le domaine A du plan situé en dessous de l'axe (Ox) et compris entre la courbe C et l'axe (Ox) .

b. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = x(2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11) \text{ est une primitive de la fonction } f \text{ sur l'intervalle }]0; +\infty[.$$

Exercice 3

La courbe donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur

$$]0; +\infty[\text{ par : } f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$$

1. a. Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de

$$N(x) = -\left[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln x\right]$$

b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.

c. En déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$ et les coordonnées du point de la courbe de f d'ordonnée maximale.

2. On note $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $]0; 1[$.

a. Exprimer $A(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).

b. Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 à droite.

Donner une interprétation graphique de cette limite.

3. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme un élément de $[1; 2]$ et pour tout entier

$$\text{naturel } n, u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1.$$

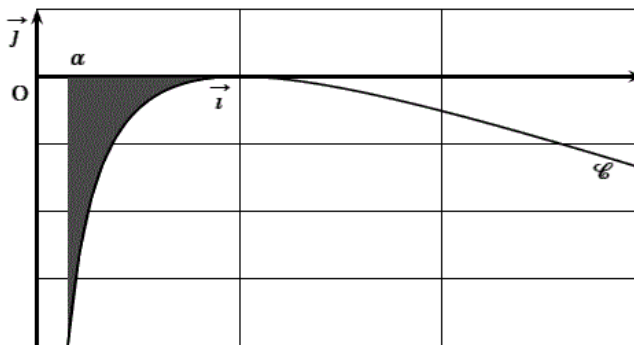
a. Démontrer, pour tout réel x élément de $[1; 2]$, la double inégalité $0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[1; 2]$.

4. En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

b. Déterminer la valeur exacte de ℓ .



Exercice 4

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$

2. a. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x+n} dx$

b. Dédurre en utilisant la question 1) que pour $n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ (1) et que

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

3. On appelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante

4. On désigne par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

Démontrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

5. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers une limite commune notée ℓ .

Déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.