Examen national 2016
session normale

Exercice 1 : (3,5 points)

On rappelle que $\left(\mathcal{M}_3(IR),+,\times\right)$ est un anneau unitaire d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif. Pour tout $(x;y)\in IR^2$ on pose : $M(x;y)=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}$

et $E=\left\{M(x;y)/(x;y)\in IR^2\right\}$.

0,50 pt 1) a) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $\left(\mathcal{M}_3(IR),+\right)$.

0,50 pt b) Vérifier que : $\left(\forall(x;y)\in IR^2\right)$
$M(x;y)\times M(x';y')=M(xx'-yy';xy'+yx')$

2) On pose $E^*=E-\left\{M(0;0)\right\}$. On considère l'application $\varphi:\ \mathbb{C}^*\to E$ reliant chaque nombre complexe $z=x+iy$ à la matrice $M(x;y)$ de E où $(x;y)\in IR^2$.

0,25 pt a) Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ dans $(E;\times)$.

0,75 pt b) En déduire que $(E^*;\times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(1;0)$.

0,50 pt 3) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

4) On pose $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

0,50 pt a) Calculer $A\times M(x;y)$ où $M(x;y)$ est un élément de E.

0,50 pt b) En déduire que tous les éléments de E ne sont pas inversibles dans $\left(\mathcal{M}_3(IR),\times\right)$.

Exercice 2 : (3 points)

Partie I : Soit $(a;b)$ de $IN^*\times IN^*$ tel que le nombre premier 173 divise a^3+b^3

0,25 pt 1) Montrer que $a^{171}\equiv-b^{171}[173]$.
(Remarquer que $171=3\times57$)

0,25 pt 2) Montrer que : 173 divise a si et seulement si 173 divise b.

0,25 pt 3) supposons que : 173 divise a.
Montrer que 173 divise $a+b$.

4) supposons que : 173 ne divise pas a

0,50 pt a) En appliquant le théorème de Fermat montrer que $a^{172}\equiv b^{172}[173]$.

0,50 pt b) Montrer que : $a^{171}(a+b)\equiv0[173]$.

0,50 pt c) En déduire que 173 divise $a+b$.

Partie II :

On considère dans $IN^*\times IN^*$ l'équation :
$(E):x^3+y^3=173(xy+1)$.

Soit $(x;y)$ de $IN^*\times IN^*$ solution de l'équation (E), on pose $x+y=173k$ où $k\in IN^*$.

0,25 pt 1) Vérifier que : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$.

0,50 pt 2) Monter que : $k=1$, puis résoudre l'équation (E).

Exercice 3 : (3,5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé orienté $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les deux points M_1 et M_2 tel que les points O, M_1 et M_1 sont deux à deux distincts et non alignés.

Soit z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2. Soit M le point d'affixe z vérifiant la relation $z=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

0,50 pt 1) a) Montrer que : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=-1$.

0,50 pt b) En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2.

0,50 pt 2) Montrer que ; si $z_2=\overline{z_1}$ alors M appartient à l'axe des réels.

3) On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle α où $\alpha\in]0;\pi[$

0,50 pt a) Calculer z_2 en fonction de z_1 et α.

0,50 pt b) En déduire que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.

4) Soit θ un réel de $]0;\pi[$. On suppose que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation :
$6t^2-(e^{i\theta}+1)t+(e^{i\theta}-1)=0$.

0,50 pt a) Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que :
$$z=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}.$$

0,50 pt b) Donner l'expression trigonométrique du nombre z en fonction de θ.

Exercice 4 : (7 points)

Partie I :

0,50 pt 1) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto e^{-t}$, montrer que pour tout nombre réel strictement positif x il existe un nombre réel θ entre 0 et x tel que : $e^{\theta} = \dfrac{x}{1-e^{-x}}$

2) En déduire que :

0,25 pt a) $(\forall x>0)$; $1-x<e^{-x}$

0,25 pt b) $(\forall x>0)$; $x+1<e^{x}$

0,25 pt c) $(\forall x>0)$; $0<\ln\left(\dfrac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right)<x$

Partie II : On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(0)=1$ et

$f(x)=\dfrac{xe^{x}}{e^{x}-1}$; $x>0$.

Et soit (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,50 pt 1) a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

0,50 pt b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 pt 2) a) Montrer que : $(\forall x\geq 0)$; $x-\dfrac{x^{2}}{2}\leq -e^{-x}+1$

(Vous pouvez utiliser le résultat de la question 2-a) de la partie I)

0,50 pt b) En déduire que : $(\forall x\geq 0)$;

$$\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{6}\leq e^{-x}+x-1\leq\frac{x^{2}}{2}$$

0,50 pt 3) a) Vérifier que : $(\forall x>0)$;

$$\frac{f(x)-1}{x}=\frac{e^{-x}+x-1}{x^{2}}f(x)$$

0,75 pt b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1}{2}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,75 pt 4) a) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que : $(\forall x>0)$; $f'(x)=\dfrac{e^{x}\left(e^{x}-x-1\right)}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}$

0,50 pt b) En déduire que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

(Vous pouvez utiliser le résultat de la question 2-b) de la partie I)

Partie III :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0>0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\ln\left(f(u_n)\right)$

0,50 pt 1) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n>0$.

0,50 pt b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante puis déduire qu'elle est convergente.

(Vous pouvez utiliser le résultat de la question 2-c) de la partie I)

0,50 pt c) Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation $\ln\left(f(x)\right)=x$, puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 5 : (3 points)

On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $I=]0;+\infty[$ par : $F(x)=\displaystyle\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^{t}-1}}dt$

0,50 pt 1) a) Étudier le signe de $F(x)$ pour tout x de I.

0,50 pt b) Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout x de I.

0,25 pt c) Montrer que F est strictement croissante sur l'intervalle I.

0,50 pt 2) a) En utilisant la technique de changement de variable et en posant $u=\sqrt{e^{t}-1}$ montrer que pour tout x de I on a :

$$\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^{t}-1}}dt=2\arctan\sqrt{e^{x}-1}-\frac{\pi}{2}$$

0,50 pt b) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^{+}}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

0,25pt 3) a) Monter que F est une bijection de l'intervalle I vers un intervalle J à déterminer.

0,50 pt b) Déterminer F^{-1} la bijection réciproque de F.