Exercice 1 (Application fondamentale de l'IAF) :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=[1;2]$ par : $f(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, et soit une suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1}=f(u_n) \qquad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$.

1. Montrer que $f(I)\subset I$, et qu'il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que : $f'(x)\le k<1$ pour tout $x\in I$.
2. Déterminer $l\in I$ vérifiant $f(l)=l$.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $|u_{n+1}-l|\le k|u_n-l|$
4. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $|u_n-l|\le k^n|u_0-l|$
5. Que conclure sur la suite (u_n) ?
6. Déterminer un rang à partir duquel on a nécessairement $|u_n-l|\le 10^{-3}$

Exercice 2 (11 pts) :

Soit m un nombre complexe non nul.

1pt A) 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante : (E): $z^2+2z+1+m^2=0$

1pt 2) a- Déterminer dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $z^2=-1+i$ sous la forme trigonométrique.

1pt b- Déterminer sous la forme algébrique, les valeurs de m pour que le produit des solutions de l'équation (E) est égal à i .

1pt c- En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

B) On considère dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, les points M ; M_1 ; M_2 et Ω d'affixes respectives □ m ; $z_1=-1+im$, $z_2=-1-im$ et $\omega=\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}i$. On suppose que $|m|^2+\mathrm{Re}(m)\neq 0$

2pts 1) On pose $m=e^{i\theta}$ où $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$. Écrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle.

1pt 2) Montrer que les points M ; M_1 ; M_2 ne sont pas alignés.

3) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1pt a- Déterminer l'expression complexe de la rotation R et vérifier que $R(\mathrm{M})=\mathrm{M}_1$.

1 ,5pt b- Montrer que : M ; M_1 ; M_2 et Ω sont cocycliques $\Leftrightarrow$ $\frac{m-z_2}{z_1-z_2}\in i\mathbb{R}$

1,5pts 4) En déduire l'ensemble des points $\mathrm{M}(m)$ pour que les points M ; M_1 ; M_2 et Ω sont cocycliques.

Exercice 2

Partie A

Soit f_n la fonction définie IR par: $n \in IN^* - \{1\}$; $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{x^n}{e^x - 1} & ; si \ x \neq 0 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$

0.5 1) Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$

0. 5 2) Montrer que f_n est continue en 0

0. 5 3) Etudier la dérivabilité de f_n en 0

0. 5 4) Etudier les branches infinies de la courbe de f_n au voisinage de $\pm\infty$.

1) On considère la fonction h_n définie sur IR par : $h_n(x) = (n - x)e^x - n$

0. 5 a) Etudier les variations de h_n sur IR

0. 5 b) Montrer que: $\forall n \in IN^* - \{1\} : e^{n-1} > n$.

0. 5 c) Dresser le tableau de variation de h_n sur IR

0. 75 d) Déduire que l'équation $h_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions 0 et α_n tels que : $n - 1 < \alpha_n < n$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

0.5 a) Calculer $f_n'(x)$ pour tout x de IR^* et dresser le tableau de variation de f_n sur IR (n paire)

0. 25 b) Montrer que: $\forall n \in IN^* - \{1\} : f_n(\alpha_n) = \alpha_n^{n-1}(n - \alpha_n)$

1 c) Construire la courbe de f_2 dans un repère orthonormée. $(\alpha_2 \approx 1.6)$

Partie B

On considère la suite (I_n) définie par $(\forall n \in IN^* - \{1\})$; $I_n = \int_{\ln 2}^{1} f_n(x)dx$

0.5 1) Montrer que (I_n) est décroissante.

0. 5 2) En déduire qu'elle est convergente

0.5 3) Montrer que : $\forall n \in IN^* - \{1\}$: $\dfrac{1}{e-1}\left(\dfrac{1-(\ln 2)^{n+1}}{n+1}\right) \leq I_n \leq \dfrac{1-(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$

0,25 4) Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

Partie C

Soit F la fonction définie par : $\forall x \geq 1 : F(x) = \displaystyle\int_{\ln x}^{2\ln x} f_2(t)dt$

0,5 1) Montrer que : $\forall x \in \left]1; \sqrt{e}\right[: \exists c \in [\ln x; 2\ln x] : F(x) = \dfrac{c^2}{e^c - 1}\ln x$

0. 5 2) En déduire que: $\forall x \in \left]1; \sqrt{e}\right[: \dfrac{(\ln x)^3}{x-1} \leq F(x) \leq 4\dfrac{(\ln x)^3}{x^2-1}$

0. 5 3) Montrer que F est dérivable à droite de 1et interpréter géométriquement le résultat.

0. 5 4) Montrer que F est dérivable sur $]1; +\infty[$ et que $\forall x > 1 : F'(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x(x^2-1)}(7 - x)$.

0. 5 *5) Montrer :* $\forall x \geq e^2 \quad : \dfrac{4(\ln x)^3}{x^2-1} \leq F(x) \leq \dfrac{(\ln x)^3}{x-1}$.

0. 5 *6) Déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

0,25 *7) Dresser le tableau de variation de* F *sur* $[1;+\infty[$