guessmaths

Devoir Surveillé n° 2 **1ére Bac SM Biof**

1ér Semestre Durée 3h

Exercice 1 (2pt)

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par :

$$S_n=\frac{1}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{7}{5^3}+\cdots+\frac{3n-2}{5^n}$$

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $S_{n+1}=\frac{1}{5}+\frac{S_n}{5}+\frac{3}{20}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$

2) Montrer par récurrence la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3) Déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente ; puis déterminer sa limite

Exercice 2 (4pts)

I- Soient $(a_n)_{n\geq2}$ et $(b_n)_{n\geq2}$ deux suites définies par : $a_n=\cos\frac{\pi}{2^2}\times\cos\frac{\pi}{2^3}\times\cdots\times\cos\frac{\pi}{2^n}$ et $b_n=a_n\times\cos\frac{\pi}{2^n}$

1) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq2}$ est bornée et monotone.

2) Montrer que : $\cos^2 x-\cos(2x)\geq0$; $(\forall x\in\mathbb{R})$.

3) Montrer que la suite $(b_n)_{n\geq2}$ est croissante.

4) Montrer que les sites $(a_n)_{n\geq2}$ et $(b_n)_{n\geq2}$ sont adjacentes. Que peut-on déduire.

II- Pour tout entier naturel n on pose : $c_n=a_n\times\sin\frac{\pi}{2^n}$

1) Montrer que la suite $(c_n)_{n\geq2}$ est une suite géométrique ; puis déterminer sa raison et son premier terme.

2) Déduire la limite commune L à $(a_n)_{n\geq2}$ et $(b_n)_{n\geq2}$

3) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $|1-\cos x|\leq\frac{x^3}{3}$

4) Déduire que pour tout entier naturel $n\geq2$; on a : $0\leq a_n-L\leq\frac{\pi^2}{2^{2n+1}}$

Exercice 3 (5 pts)

I- Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité de mesure est 4cm).

1) Montrer que le point $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour (C_f).

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 ; puis interpréter géométriquement le résultat

3) Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$; puis dresser son tableau de variation.

4) Etudier le signe de $(f(x)-x)$ sur $[0;1]$; puis construire (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

II- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_0\in[0;1]\\ u_{n+1}=f(u_n)\ ;\quad(\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$

1) Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si $u_0 \in \left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$.

3) On considère que : $u_0 \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$; étudier le monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; puis déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite -

4) On considère que : $u_0 \in \left]\frac{1}{2};1\right[$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 **(3pts)**

I- On considère la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{x^4+5x^3+1}{x^4+1}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = f(\tan x) \quad ; si\ x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

a) Montrer que g vérifie les conditions du théorème de Rolle sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Vérifier que : $\left(\exists c \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) /\ g'(c) = 0$.

c) Déduire que : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}) /\ f'(\alpha) = 0$.

II- Soit h une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; telle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l \in \mathbb{R}$

Montrer que l'équation $h'(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$

Exercice 5 **(6 pts)**

I- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x + \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right)$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 ; puis interpréter géométriquement le résultat.

3) Montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$

4) Déduire la monotonie de f puis dresser son tableau de variation.

5) Montrer que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

6) Etudier la branche infinie de (C_f) ; puis construire (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

7) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

8) Construire $(C_{f^{-1}})$ la courbe de f^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

II- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = a \quad ; où \quad a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$

2) Montrer que le suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3) En utilisant de théorème des accroissements finis; montrer que : $(\exists k \in]0;1[) / \ (\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} \leq ku_n$

4) Déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ; puis déterminer sa limite.