Exercice:

I- *Soit g la fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par:* $g(x)=2\ln(x)+\dfrac{x-1}{x}$

1-*Calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

2- a- *Calculer* $g'(x)$ *, pour tout* $x\in]0;+\infty[$ *; puis déduire que g est croissante sur* $]0;+\infty[$.

b- *Donner le tableau de variation de g.*

3- *Calculer* $g(1)$ *puis déduire que* $(\forall x\in]0;1])$; $g(x)\leq 0$ *et* $(\forall x\in[1;+\infty[)$; $g(x)\geq 0$

II - *Soit f une fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par:* $f(x)=(2x-1)\ln(x)-x+1$

et (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, *puis interpréter géométriquement le résultat*

2- a- *Calculer* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b- *Interpréter géométriquement les résultats obtenus.*

3- a- *Démontrer que pour tout* $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=g(x)$.

b- *Donner le tableau de variation de f.*

4- *Construire* (C).

Solution

I-1-■ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\ln(x)+\dfrac{x-1}{x}\right)=-\infty$ (*car* $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x}=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$)

■ $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2\ln(x)+\dfrac{x-1}{x}\right)=+\infty$ (*car* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-1}{x}=1$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty$)

2- a- *pour tout* $x\in]0;+\infty[$, *on a :* $g'(x)=\left(2\ln(x)+\dfrac{x-1}{x}\right)'$

$$=2\times\frac{1}{x}+\frac{(x-1)'\times x-(x-1)\times(x)'}{x^2}$$

$$=2\times\frac{1}{x}+\frac{x-(x-1)}{x^2}$$

$$=\frac{2x+1}{x^2}$$

Comme $2x+1>0$ *alors* $g'(x)>0$

D'où g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3- *On a* $g(1)=2\ln(1)+\dfrac{1-1}{1}=0$

■ *Comme g est croissante sur l'intervalle* $]0;1]$ *alors* $\forall x\le 1$; $g(x)\le g(1)$ *d'où* $g(x)\le 0$.

■ *Comme g est croissante sur l'intervalle* $[1;+\infty[$ *alors* $\forall x\ge 1$; $g(x)\ge g(1)$ *d'où* $g(x)\ge 0$.

II- *1-* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left((2x-1)\ln(x)-x+1\right)=+\infty$ *(Car* $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ *)*

Interprétation géométrique

(C) *admet une asymptote verticale d'équation* $x=0$.

2- a- -■ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((2x-1)\ln(x)-x+1\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\left(\frac{2x-1}{x}\right)\ln(x)-1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=+\infty$$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)\ln(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ *)*

■ -■ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(2x-1)\ln(x)-x+1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{2x-1}{x}\right)\ln(x)-1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=+\infty$$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)\ln(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ *)*

b- ***Interprétation géométrique****:*

(C) *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées a voisinage de* $+\infty$.

3- a- pour tout $x\in\,]0;+\infty[$ *, on a :* $f'(x)=\left((2x-1)\ln(x)-x+1\right)'$

$$=2\ln(x)+(2x-1)\times\frac{1}{x}-1$$

$$=2\ln(x)+\frac{2x-1-x}{x}$$

$$=2\ln(x)+\frac{x-1}{x}$$

$$=g(x)$$

D'après la question ***I***-*3-*■ $\forall x\le 1$; $g(x)\le 0$.

■ $\forall x\ge 1$; $g(x)\ge 0$.

Alors : -■ $\forall x\le 1$; $f'(x)\le 0$.

■ $\forall x\ge 1$; $f'(x)\ge 0$.

Donc : f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ *et croissante sur l'intervalle* $[1;+\infty[$

Tableau de variation de f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4-Construction de (C):