Exercice 1.

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{3-U_n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 < U_n < 2$.

2) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; on a : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{3 - U_n}$.

b) Etudier la monotone de (U_n)

c) (U_n) est-elle Convergente? Justifier

3) On pose : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

b) Ecrire V_n en fonction de n.

c) Déduire que : $U_n = \dfrac{2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 1}$; puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice 2

(U_n) est la suite définie par : $\begin{cases} U_1 = \dfrac{7}{3} \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n + 3}{3U_n + 7} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

1) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_n \geq 1$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on a : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{3(1 - U_n^2)}{3U_n + 7}$; puis déduire la monotonie de (U_n).

c) (U_n) est-elle convergente?

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose, $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

b) Ecrire V_n en fonction de n

c) Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_n = \dfrac{1 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$ puis Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3) Soit la somme $S_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$.

Ecrire S_n en fonction de n puis calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 3

(U_n) est la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n}{21+U_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1) Montrer que : $U_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} < \dfrac{1}{7}U_n$

31 Montrer que (U_n) est décroissante et déduire qu'elle est convergente.

4) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $U_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$

b) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 4

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n}{1+2U_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n < 3$.

b) Montrer que (U_n) est strictement croissante ; puis déduire qu'elle est convergente

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose, $V_n = \dfrac{U_n}{3-U_n}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

b) Ecrire V_n puis U_n en fonction de n ; et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.