Exercice 1:

1- Soit a un réel tel que $a \neq -\frac{1}{2}$ et (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \frac{-7U_n - 8}{2U_n + 1}; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Pour quelle valeur de a, la suite (U_n) est-elle constante?

2- Dans la suite on prend $U_0 = 1$.

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $U_n \neq -2$

3- On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2}$

Démontrer que la suite (V_n) est arithmétique, exprimer V_n en fonction de n.

4- Exprimer U_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice 2 :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 ; U_1 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + U_{n-1}}{2}; \quad si\ n>1 \end{cases}$

Soit la suite (V_n) définie par : $V_n = U_{n+1} - U_n$

1- Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme V_0

2- Exprimer le terme V_n en fonction de n.

3- Calculer la somme en $S_n = V_0 + V_1 + V_2 ...... + V_{n-1}$

4- Etudier la convergence de (S_n)

5- Exprimer le terme général U_n en fonction de n, puis calculer la limite de U_n .

Exercice 3 :

1- Soit la fonction f définie par : $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

b) démontrer que (C_f) admet deux asymptotes que l'on précisera.

c) Etudier les variations de f et construire (C_f) dans le même repère orthonormé$(O;\vec{i};\vec{j})$.

2- Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1 et au point d'abscisse -1.

3- Soit la fonction $g(x) = x - \sqrt{|x^2 - 1|}$ et (C_g) sa courbe représentative dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) démontrer que (C_f) et (C_g) sont symétriques par rapport au point $O(0;0)$.

b) Construire (C_g) sur le même graphique que (C_f)