Exercice 1 : (11 points)

Partie I

soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x(\ln x)^2 + x & si \ \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2- a - Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$.

b- Etudier la continuité de la fonction f à droite en 0.

3- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat .

4- a - Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b - Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement

5- a - Montrer que f est dérivable sur D_f.

b - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

c - Dresser le tableau de variations de f.

6- a - Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in D_f$.

b-Etudier la concavité de la courbe (C_f) et déterminer ses points d'inflexion,

7- a- Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 1$.

b - Etudier la position relative de la courbe (C_f) et de la droite $(\Delta) : y = x$.

8- Tracer (C_f) et (Δ) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

9 - a - Montrer que la fonction f admet une fonction réciproques f^{-1} sur un intervalle que J l'on précisera.

b - Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.

c- Calculer $f(e)$ puis déterminer $(f^{-1})'(2e)$

Partie II

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) & ; \ (\forall n \in \mathrm{IN}) \end{cases}$

1- Montrer que : $(\forall n \in \mathrm{IN})$; $0 < u_n < 1$.

2- Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante

3- Déduire que (u_n) est convergente, puis calculer sa limite.