✓ **Note :**

Le sujet se compose de cinq exercices : traiter au choix l'exercice d'arithmétique ou bien celui des structures algébriques.

Exercice 01:(3,5pts)

⇨ Dans le système décimal, on considère l'entier naturel :

$$a_n = \underbrace{11...11}_{n\ fois} \text{ , Où } n \in \mathbb{N}^* .$$

0,5 — 1)- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On a : $a_n \equiv 1[2]$ et $a_n \equiv 1[5]$.

0,25 — 2)- Déterminer toutes les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles : $a_n \equiv 0[3]$.

0,5 — 3)- Soit $p > 5$ un nombre premier.

✓ En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $a_{p-1} \equiv 1[p]$.

0,25 — 4)- a)- Vérifier que : $\left(\forall (m,n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2\right); m < n \Rightarrow a_n - a_m = 10^m . a_{n-m}$.

b)- Soit $q \geq 2$ un entier naturel tels que : $q \wedge 10 = 1$.

0,5 — ✓ Montrer que : $\left(\exists k \in \mathbb{N}^*\right); a_k \equiv 0[q]$ (On pourra utiliser **4)- a)-** et Gauss).

0,5 — 5)- Quels sont les entiers naturels non nuls qui ont au moins un multiple qui s'écrit Dans le système décimal sous la forme a_n Où $n \in \mathbb{N}^*$.

0,5 — 6)- a)- Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right); a_n \equiv 0[7] \Leftrightarrow n \equiv 0[6]$.

0,5 — b)- Déterminer le plus grand entier a_n divisible par 7 et plus petit que $b = 2^{561}$.

Exercice 02:(3,5pts)

✓ Les parties I et II sont indépendantes.

0,25 — I-1)- Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $a = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

0,25 — 2)- En déduire sous forme algébrique les racines carrées de a .

0,5 — 3)- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): 2z^2 + \frac{1}{2}\left(-3\sqrt{3} + i\right)z + 1 = 0$.

II- *Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, *On Considère les points* A, B *et* C *d'affixes respectifs :* $a=2$, $b=1-i$ *et* $c=1+i$.

0,25 1)- a)- *Construire le triangle* ABC .

0,25 b)- *Ecrire* $\dfrac{c-a}{b-a}$ *sous forme algébrique , puis déduire la nature du triangle* ABC .

2)- *Soit* r *la rotation de centre* A *vérifiant :* $r(B)=C$. *On pose :* $D=r(C)$.

On désigne par (Γ) *le cercle de diamètre* $[BC]$. *On pose :* $(\Gamma')=r(\Gamma)$.

0,5 a)- *Déterminer l'angle de la rotation* r *ainsi que* $d=aff(D)$.

0,5 b)- *Déterminer et construire l'ensemble* (Γ') .

3)- *Soit* $M(z)$ *un point de* (Γ) *distinct de* C *et* $M'(z')$ *son image par la rotation* r .

0,25 a)- *Montrer que :* $\left(\exists\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};2\pi\right]\right);z=1+e^{i\theta}$.

0,25 b)- *En déduire que :* $z'=-ie^{i\theta}+2+i$.

0,25 c)- *Montrer que :* $\dfrac{z'-c}{z-c}=\dfrac{2\cos\theta}{\left|e^{i\theta}-i\right|^2}$ *puis en déduire que* C , M *et* M' *sont alignés* .

0,25 4)- *Construire le point* $M\left(1+e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$ *et son image* M' *par la rotation* r .

Exercice 03:(3,5pts)

➩ *On pose :* $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ *et* $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble : $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b&b\\b&a+b\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

0,5 1)- a)- *Montrer que* $(E,+,\cdot)$ *est un espace vectoriel réel* .

0,5 b)- *Montrer que* $\mathrm{B}(I,J)$ *est une base de* $(E,+,\cdot)$ *puis en déduire* $\dim(E)$.

0,5 2)- *Vérifier que* $J^2=2.I$ *puis en déduire que pour tout* $(a,b,x,y)\in\mathbb{R}^4$, *on a :*

$$M(a,b)\times M(x,y)=M(ax,ay+bx+2by).$$

0,75 3)- *Montrer que* $(E,+,\times)$ *est un anneau unitaire non intègre* .

0,5 4)- *Montrer que* $M(a,b)$ *est inversible dans* $(E,+,\times)$ $\Leftrightarrow(a\neq0$ et $a\neq-2b)$.

5)- On considère l'ensemble : $H=\left\{A(x)=I+\dfrac{3^x-1}{2}.J \,/\, x\in\mathbb{Z}\right\}$.

0,25 a)- Montrer $(H,\times)$ que est une partie stable de $(IM_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,5 b)- Montrer que l'application $f: x\mapsto A(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{Z},+)$ vers $(H,\times)$ puis en déduire que est $(H,\times)$ un groupe commutatif.

Exercice 04:(6,5pts)

⇨ Soit f la fonction définie par : $f(x)=x-2\ln\left|\dfrac{1}{2}e^x-1\right|$.

(C_f) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tels que : $\|\vec{i}\|=2cm$.

0,25 1)- a)- Déterminer D_f .

0,5 b)- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\ln 2} f(x)$.

0,75 2)- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et que la droite (Δ) d'équation $y=-x+2\ln 2$ est Une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

0,5 3)- Montrer que la droite (D) d'équation $x=\ln 2$ est un axe de symétrie de (C_f).

0,5 4)- Montrer que f est dérivable sur tout intervalle de D_f et que :

$$(\forall x\in D_f);f'(x)=\frac{2+e^x}{2-e^x}.$$

0,5 5)- Prouver que : $(\forall x\in D_f);f''(x)>0$.

0,5 6)- Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7)- On désigne g par la restriction de f à l'intervalle $I=]\ln 2;+\infty[$.

0,5 a)- Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera .

0,5 b)- Déterminer la bijection réciproque g^{-1}.

8)- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=\ln 3 \text{ et } (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=u_n-\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \text{ . On pose : } \alpha=g^{-1}(0) \text{ .}$$

0,5 a)- Soit $x\in]\ln 2;\alpha[$. En appliquant le théorème des accroissement fini à f sur Le segment $[x;\alpha]$, montrer que : $x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\le\alpha$.

0,5 b)- Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\in]\ln 2;\alpha[$.

0,5 c)- Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis déduire qu'elle est convergente.

0,5 d)- Justifier soigneusement que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$.

Exercice 05:(6,5pts)

I- On considère la fonction f définie par : $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

(C_f) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tels que : $\|\vec{i}\|=2cm$.

0,5 1)- Vérifier que : $D_f=\mathbb{R}$ et étudier la parité de f .

0,5 2)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Que peut-on déduire ?

0,5 3)- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et étudier la concavité de (C_f).

0,5 4)- Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et déterminer f^{-1}.

0,5 5)- Construire (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ en précisant la tangente (T) au point d'abscisse 0.

0,5 6)- En utilisant une intégration par parties , calculer l'aire du domaine :

$$(\Delta)=\left\{M(x,y)\in(\mathrm{P})\,/\,x\in[0;1];y\in[0;1];f(x)\le y\le f^{-1}(x)\right\} .$$

II- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, On pose : $a_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$.

0,25 1)- a)- Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);a_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{k}{n}}$.

0,5 b)- En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente en que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\ln 2$.

2)- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, On pose : $b_n=f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)+f\left(\dfrac{1}{n+2}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{1}{2n}\right)$.

0,5 a)- Montrer que : $(\forall t\ge 0);1-\dfrac{1}{2}t^2\le f'(t)\le 1$. Puis en déduire que :

$$(\forall x\ge 0);x-\frac{1}{6}x^3\le f(x)\le x .$$

0,5 b)- Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);a_n\left(1-\dfrac{1}{6n^2}\right)\le b_n\le a_n$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

III- On considère la fonction F définie par :

$$F(0)=\ln 2 \text{ et } F(x)=\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t^2}dt;x\ne 0 .$$

0,5 1)- Justifier que : $D_F=\mathbb{R}$ et que F est une fonction paire .

0,25	2)- a)- *Montrer que :* $(\forall x>0); -\frac{1}{4}x^2+\ln 2 \le F(x) \le \ln 2$ *(Utiliser* II *2)- a)-).*
0,5	b)- *En déduire que* F *est continue et dérivable à droite en* $x_0=0$.
0,25	3)- a)- *Montrer que :* $(\forall x>0); \frac{f(x)}{2x} \le F(x) \le \frac{f(2x)}{2x}$.
0,25	b)- *En déduire :* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
0,5	4)- a)- *Montrer que* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *et que :* $$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right); F'(x)=\frac{f(2x)-2f(x)}{2x^2}.$$
0,25	b)- *Montrer que :* $(\forall x>0); f(2x)-2f(x)<0$.
0,5	5)- *Dresser le tableau de variation complet de* F *en justifiant votre réponse .*

Fin Du Sujet .