Exercice 1 :

1) *Montrer que l'équation :* $x^3 + x + 1 = 0$ *admet une racine unique dans* $]-1;0[$

2) *Etudier le signe de* $\left(x^3 + x + 1\right)$ *sur* $]-1;0[$.

Solution :

1) *On considère la fonction h tel que :* $h(x) = x^3 + x + 1$

• *On a : h est continue sur (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur* $]-1;0[$

• *On a :* $h(-1) = -1$ *et* $h(0) = 1$ *donc :* $h(-1) \times h(0) < 0$

• $h'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ *Sur* $]-1;0[$ *donc h est strictement croissante sur* $]-1;0[$

Donc : d'après le (T.V.I) l'équation $h(x) = 0$ *admet une solution unique dans* $]-1;0[$

2) *h est strictement croissante sur* $]-1;0[$

Donc pour $x \in]-1;\alpha[$ *; on a :* $h(x) < h(\alpha)$ *et* $h(\alpha) = 0$ *; d'où* $h(x) < 0$

Donc pour $x \in]\alpha;0[$ *; on a :* $h(x) > h(\alpha)$ *et* $h(\alpha) = 0$ *; d'où* $h(x) > 0$

Conclusion : $x^3 + x + 1$ *est négatif sur* $[-1;\alpha]$ *; et positif sur* $[\alpha;0]$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$

1) *Montrer que la fonction g la restriction de f sur intervalle* $]-2;+\infty[$ *admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur un intervalle J qu'il faut déterminer.*

2) *Déterminer* $g^{-1}(x)$ *pour tout x de l'intervalle J*

Solution :

1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x+2\neq 0\}$

$=\{x\in\mathbb{R} / x\neq -2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

Soit g la restriction de f sur intervalle $]-2;+\infty[$; *g est continue dérivable sur* $]-2;+\infty[$ *et pour tout* $x\in]-2;+\infty[$ *on a :* $g'(x)=\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)'$

$$=\frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{5}{(x+2)^2}$$

Donc $(\forall x\in]-2;+\infty[)$; $g'(x)>0$

Par suite g est strictement croissante et continue sur $]-2;+\infty[$

donc g admet une fonction réciproque g^{-1} *définie sur un intervalle J.*

$J=g(]-2;+\infty[)=\left]\lim_{x\to -2^+} g(x);\lim_{x\to+\infty} g(x)\right[=]-\infty;1[$

2) *Soit* $x\in]-\infty;1[$ *et* $y=]-2;+\infty[$; *tel que :* $y=g^{-1}(x)$

On a : $y=g^{-1}(x)\Leftrightarrow x=g(y)$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y-3}{y+2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y+2-5}{y+2}$$

$$\Leftrightarrow x=1-\frac{5}{y+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{y+2}=1-x$$

$$\Leftrightarrow y+2=\frac{5}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{5}{1-x}-2$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{5-2(1-x)}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{2x+3}{1-x}$$

Donc $\left(\forall x\in\left]-\infty;1\right[\right)$; $g^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ *par :* $f(x)=\sqrt{2x-1}$

1) *Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur un intervalle J qu'il faut déterminer.*

2) *Déterminer* $f^{-1}(x)$ *pour tout x de l'intervalle J*

3) *Représenter* (C_f) *et* $(C_{f^{-1}})$ *dans le même repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution :

1) *Les fonctions* $x\mapsto 2x-1$ *est dérivable sur* $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ *et* $x\mapsto\sqrt{x}$ *est dérivables sur* $I=\left]0;+\infty\right[$

Donc f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ *; comme composée de deux fonctions dérivables ;et pour tout* $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ *on a :* $f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

Alors $\left(\forall x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$; $f'(x)>0$

D'où f est strictement croissante et continue sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} *définie sur un intervalle*

$$J=f\left(\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$$

$$=\left]f\left(\frac{1}{2}\right);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[$$

$=]0;+\infty[$

2) $\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ y \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ x \in [0;+\infty[\end{cases}$

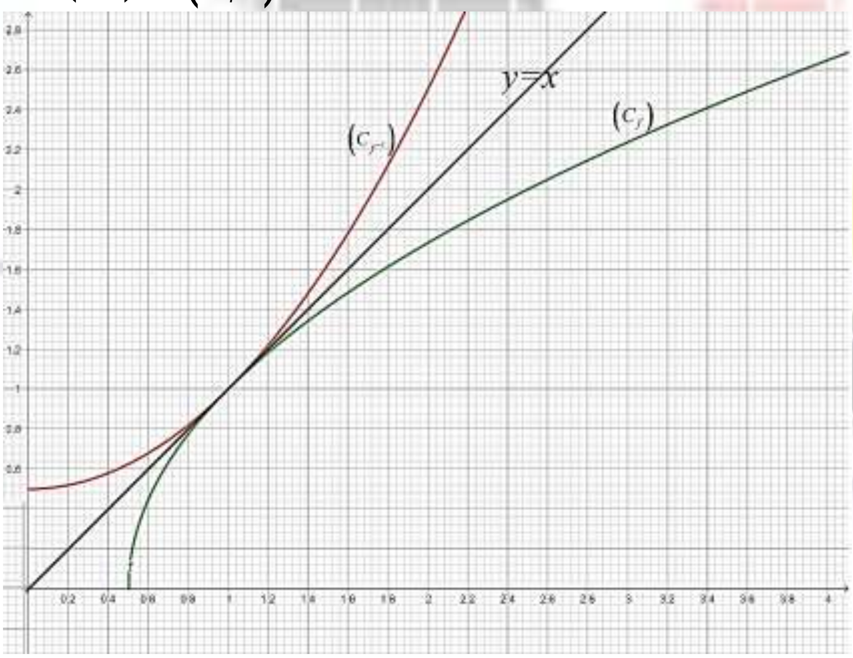
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2y-1} \\ x \in [0;+\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2y-1 \\ x \in [0;+\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2+1}{2} \\ x \in [0;+\infty[\end{cases}$$

$(\forall x \in [0;+\infty[)\ ;\ f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$

3) *Représentation de* (C_f) *et* $(C_{f^{-1}})$



Exercice 4 :

Considérons la fonction f définie et continue Sur l'intervalle $[a;b]$ *tel que :* $f(a) < 0$ *il*

Montrer qu'il existe $x_0 \in]a;b[$ *tel que :* $f(x_0) = \dfrac{a - x_0}{b - x_0}$

Solution :

On a : $f(x_0)=\dfrac{a-x_0}{b-x_0} \Leftrightarrow f(x_0)(b-x_0)-(a-x_0)=0$

Considérons la fonction g définie par : $g(x)=f(x)(b-x)-(a-x)$*; la fonction g est continue sur l'intervalle* $[a;b]$ *car c'est la somme de fonctions continues sur* $[a;b]$

On a : $g(a)=f(a)(b-a)<0$ *et* $g(b)=b-a>0$ *(car* $f(a)<0$ *et* $b>a$*)*

Donc d'après le TVI $(\exists x_0 \in]a;b[)$ *tel que :* $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)(b-x_0)-(a-x_0)=0$

$$\Leftrightarrow (\exists x_0 \in]a;b[);\ f(x_0)=\frac{a-x_0}{b-x_0}$$

Exercice 5 :

Soit la fonction $f(x)=x^2+x+1$ *définie sur* $\mathbb{R}$.

1- *Déterminer* $J=f([0;1])$

2- *Montrer que la restriction g de f admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie de* $[0;1]$ *vers J et déterminer* $g^{-1}(x)$ *pour tout* $x\in J$

Solution :

$f(x)=x^2+x+1$

1- *f est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(car c'est une fonction polynôme) ; et pour tout* $\mathbb{R}$ *on a :*

$f'(x)=2x+1$

Donc f est strictement croissante sur $[0;1]$ *; d'où* $f([0;1])=[f(0);f(1)]=[1;3]$

2- *La restriction g de f sur* $[0;1]$ *est continue strictement croissante ; donc elle admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur* $J=f([0;1])=[1;3]$

Et pour tout $x\in J$ *et* $y\in[0;1]$ *; on a :* $y=g^{-1}(x) \Leftrightarrow x=g(y)$

$$\Leftrightarrow x=y^2+y+1$$

$$\Leftrightarrow x = y^2 + 2\times\frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = x - \frac{3}{4} \text{ et } x \in [1;3]$$

$$\Leftrightarrow y + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{x-\frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{x-\frac{3}{4}}$$

Or $y = -\frac{1}{2} - \sqrt{x-\frac{3}{4}} < 0$ *; donc* $y \notin [0;1]$

Alors pour tout $x \in [1;3]$ *on a :* $g^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{x-\frac{3}{4}}$

<u>Exercice 6 :</u>

Soit g la fonction définie $\mathbb{R}^+$ *sur par :* $g(x) = x - 2\sqrt{x}$.

1- *Montrer que g est strictement croissante sur* $[1;+\infty[$ *puis déterminer* $J = g([1;+\infty[)$

2- *Montrer que la restriction h de g sur* $[1;+\infty[$ *admet une fonction réciproque* h^{-1} *définie de J vers* $[1;+\infty[$ *et déterminer* $h^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in J$

<u>Solution :</u>

1- *La fonction g est continue dérivable sur* $]0;+\infty[$ *comme somme de fonctions dérivables sur* $]0;+\infty[$ *; et pour tout* $x \in]0;+\infty[$ *; on a :* $g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

Donc $(\forall x \in]1;+\infty[)$ *;* $g'(x) > 0$

D'où g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ *; et* $J = g([1;+\infty[) = \left[g(1); \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[$

Et $g(1)=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$$

D'où $J=\left[-1;+\infty\right[$

2- *La restriction h de g sur* $\left[1;+\infty\right[$ *est continue strictement croissante donc elle admet une fonction réciproque* h^{-1} *définie sur* $J=g\left(\left[1;+\infty\right[\right)=\left[-1;+\infty\right[$

Pour $x\in\left[-1;+\infty\right[$ *et* $y\in\left[1;+\infty\right[$ *; on a :* $y=h^{-1}(x)\Leftrightarrow x=h(y)$

$$\Leftrightarrow x=g(y)$$

$$\Leftrightarrow x=y-2\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{y}^{2}-2\sqrt{y}+1-1$$

$$\Leftrightarrow x=\left(\sqrt{y}-1\right)^{2}-1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y}-1\right)^{2}=x+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}-1=\pm\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}=1\pm\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow y=\left(1\pm\sqrt{x+1}\right)^{2}$$

Or $1-\sqrt{x+1}<0$ *; donc* $y=\left(1-\sqrt{x+1}\right)^{2}\notin\left[1;+\infty\right[$

D'où $y=\left(1+\sqrt{x+1}\right)^{2}$

Donc $\left(\forall x\in\left[-1;+\infty\right[\right)$; $h^{-1}(x)=\left(1+\sqrt{x+1}\right)^{2}$