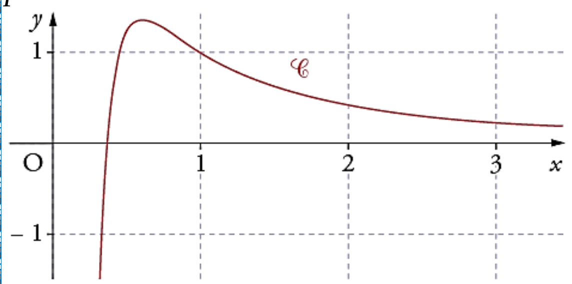
Etude d'une fonction logarithmique **2éme Bac SM**

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$ *et soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe C est donnée ci-dessous :*



1. a) *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

   b) *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

   c) *En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C.*

2. a) *On note f ' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle* $]0\,;+\infty[$.
   Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$.

   b) *Résoudre sur l'intervalle* $]0\,;+\infty[$ *l'inéquation* $-1-2\ln x>0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ *sur l'intervalle* $]0\,;+\infty[$.

   c) *Dresser le tableau des variations de la fonction f.*

3. a) *Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.*

   b) *En déduire le signe de f (x) sur l'intervalle* $]0\,;+\infty[$

4. *Pour tout entier* $n\geq 1$ *, on note* I_n *l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives* $x=\dfrac{1}{e}$ *et* $x=n$.

   a) *Démontrer que* $0\leq I_2\leq e-\dfrac{1}{2}$.

   On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ *par :* $F(x)=\dfrac{-2-\ln x}{x}$ *, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle* $]0\,;+\infty[$.

   b) *Calculer* I_n *en fonction de n.*

   c) *Étudier la limite de* I_n *en* $+\infty$*. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

Correction

1.a) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+\ln x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0^+}(1+\ln x)\times\frac{1}{x^2}=-\infty$$

Car : $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln x)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

b) Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{1}{x}$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{x}=0$$

Car : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

c) Interprétation géométrique

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ *,alors l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe C au voisinage de* $+\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$*, l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe C.*

2.a) Calcule de la dérivée de f

Comme la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$*, la fonction* $x\mapsto 1+\ln x$ *est dérivable sur* $]0\,;+\infty[$.

La fonction $x\mapsto x^2$ *est dérivable sur IR donc dérivable sur* $]0\,;+\infty[$.

Par suite, la fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ *comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur* $]0\,;+\infty[$.

Pour tout nombre réel strictement positif *x* :

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-(1+\ln x)\times 2x}{(x^2)^2}$$
$$=\frac{x-(1+\ln x)\times 2x}{x^4}$$
$$=\frac{1-(1+\ln x)\times 2}{x^3}$$
$$=\frac{-1-2\ln x}{x^3}$$

b) *Étude de signe de $f'(x)$*

Pour tout nombre réel strictement positif *x* :

$$-1-2\ln x>0 \Leftrightarrow -2\ln x>1$$
$$\Leftrightarrow \ln x<-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow -2\ln x<1$$
$$\Leftrightarrow x\prec e^{-\frac{1}{2}}$$

Par un raisonnement analogue, nous pouvons démontrer que $-1-2\ln x<0 \Leftrightarrow x>e^{-\frac{1}{2}}$ *et* $-1-2\ln x>0 \Leftrightarrow x<e^{-\frac{1}{2}}$.

Comme $x^3>0$, $f'(x)$ *a le même signe que son numérateur* $-1-2\ln x$. *Le tableau de signe s'ensuit :*

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$

c) *Dresser le tableau de variations d'une fonction*

Le tableau de variations découle immédiatement du tableau de signes de $f'(x)$. *En effet, comme sur l'intervalle* $\left]0;e^{-\frac{1}{2}}\right[$, $f'(x)$ *est strictement positive, la fonction f est strictement croissante sur* $\left]0;e^{-\frac{1}{2}}\right[$.

Par contre, comme sur l'intervalle $\left]e^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[$, $f'(x)$ *est strictement négative, la fonction f est strictement décroissante sur* $\left]e^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[$.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$ ↗	$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{e}{2}$	↘ 0

3.a) *Déterminer les coordonnées d'un point d'intersection*

Un point M de coordonnées (x ; y) appartient à la courbe C si et seulement si $x>0$ *et* $y=f(x)$.

Un point M de coordonnées (x ; y) appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $y=0$.

Par conséquent, pour déterminer les coordonnées d'un point M appartenant à la courbe C et à l'axe des abscisses, nous devons résoudre sur $]0\,;+\infty[$ *l'équation* $f(x)=0$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1+\ln x}{x^2}=0$$
$$\Leftrightarrow 1+\ln x=0$$
$$\Leftrightarrow \ln x=-1$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

La courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses : les coordonnées de ce point sont $\left(\frac{1}{e};0\right)$.

b) *Étudier le signe d'une fonction*

La fonction f est décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right[$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. *Il s'ensuit que la fonction f est positive sur* $\left[\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right[$.

La fonction f est croissante sur $\left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ *et elle s'annule en* $\frac{1}{e}$. *Il s'ensuit que la fonction f est strictement négative sur* $\left]0;\frac{1}{e}\right[$ *et strictement positive sur* $\left]\frac{1}{e};\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$.

x	0	e	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

a) Encadrer une intégrale

D'après le tableau de variations (question 2. c)), pour tout nombre réel strictement positif x,

$f(x) \leq \dfrac{e}{2}$.

D'après le tableau de signes (question 3. b)), pour tout nombre réel x dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{e};2\right]$,

$f(x) \geq 0$.

Par conséquent, sur $\left[\dfrac{1}{e};2\right]$; $0 \leq f(x) \leq \dfrac{e}{2}$.

Les fonctions, $x \mapsto 0$ *et* $x \mapsto \dfrac{e}{2}$ *sont continues sur* $\left[\dfrac{1}{e};2\right]$. *Par propriété de l'intégrale, il en découle que :*

$$\int_{\frac{1}{e}}^{2} 0dx \leq \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)dx \leq \int_{\frac{1}{e}}^{2} \frac{e}{2}dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)dx \leq \frac{e}{2}[x]_{\frac{1}{e}}^{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)dx \leq \frac{e}{2}\left(2-\frac{1}{e}\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)dx \leq e-\frac{1}{2}$$

Conclusion : $0 \leq I_2 \leq e-\dfrac{1}{2}$.

b) $I_n = \int_{\frac{1}{e}}^{n} f(x)dx$

donc :

$$I_n = \int_{\frac{1}{e}}^{n} \frac{1+\ln x}{x^2}dx = \left[\frac{-2-\ln x}{x}\right]_{\frac{1}{e}}^{n} = \frac{-2-\ln(n)}{n}+e$$

D'où pour tout n $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \dfrac{-2-\ln(n)}{n}+e$

c) comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ *alors ;*

$\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = e$

***Interprétation géométrique** :*

L'aire définie par la courbe de f ; l'axe des abscisses sur la partie du plan où f est positive est finie de valeur e.