

Exercice 1 (3pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ on considère le plan (P) passant par le point $A(0,1,1)$ et dont un vecteur normal et la sphère (S) de centre $\Omega(0,1,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$

1. a) Montrer que : $x - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P).
b) Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifie que $B(-1;1;0)$ est le point de contact.
2. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P).
b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point $C(1,1,0)$.
3. Montrer que : $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{k}$ en déduire l'aire du triangle OCB.

Exercice 2 (3pts)

Une urne contient 8 boules
(Indiscernables au toucher) portant chacun
Un numéro comme indique sur la figure ci-contre On tire au hasard,
simultanément trois boules de l'urne.



1. Soit les événements
A « parmi les trois boules tirées, aucune ne porte le numéro 0 »
B « le produit des chiffres portés par les trois boules tirées est égale à 8 »
Montrer que : $P(A) = \frac{5}{14}$ et $P(B) = \frac{1}{7}$
2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des chiffres portés par les trois boules tirées.
a) Montrer que : $P(X = 16) = \frac{3}{28}$
b) Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Recopier sur votre copie et compléter le tableau en justifiant chaque réponse

x_i	0	4	8	16
$p(X = x_i)$				$\frac{3}{28}$

Exercice 3 (3pts)

On considère les nombres complexe a et b tels que : $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$

1. a) vérifier que : $b = (1 + i)a$

b) En déduire que : $|b| = 2\sqrt{2}$ et que : $\arg b \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$

c) Déduire de ce qui précède que : $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les point A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe c telle que : $c = -1 + i\sqrt{3}$

a) vérifier que : $c = ia$ et en déduire que : $OA = OC$ et que :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

b) Montrer que le point B est l'image du point A par la translation du vecteur $\overrightarrow{OC}$.

c) En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un carré.

Problème (11 pts)

I- Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$$

1. Vérifier que $g(1) = 0$

2. A partir du tableau de variation de la fonction g ci-dessous :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, 1]$ et que

$g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, +\infty[$

II – On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x, \text{ Soit } (C) \text{ la courbe représentative de la fonction } f$$

dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

1. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.

2. a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y = x$.

3. a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$

b) Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$ et croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

4. a) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$.

b) En déduire que la courbe (C) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

c) Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, 2]$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (D) sur l'intervalle $[1, 2]$.

5. Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite (D) et La courbe (C) (on admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2,4 et 2,5).

6. a) Montrer que $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

b) Montrer que $H : x \mapsto 2 \ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \left(\frac{2}{x} - 1\right)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

c) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que :

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) \ln x dx = (1 - \ln 2)^2$$

d) Calculer en cm^2 l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

III – On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n .

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question II-4.c))

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.