Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{x^2-1}{4}\times 2\ln(x)$

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ *admet dans* $]0;+\infty[$ *exactement deux racines dont l'une est* $\alpha\in[3;4]$

c) Vérifier que $\alpha=\sqrt{1+8\ln(\alpha)}$

2) Soit g la fonction définie sur $[3;+\infty[$ *par :* $g(x)=\sqrt{1+8\ln(x)}$

a) Montrer que $g(x)\geq 3$ *et que* $0\leq g'(x)\leq\dfrac{4}{9}$ *;* $(\forall x\in[3;+\infty[)$

3). Soit la suite réelle (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=g(u_n) \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ *;* $u_n\geq 3$

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ *;* $|u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{4}{9}|u_n-\alpha|$

c) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ *;* $|u_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$

d) En déduire que (u_n) *est convergente et calculer sa limite.*

e) Trouver (u_n) *pour que :* $|u_n-\alpha|\leq 10^{-2}$

Exercice 2 :

Partie A :

1) Soit $f(x)=1+e^x(1-x)$

Et (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) Montrer que $f'(x)=xe^x$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que (C_f) *admet une branche infinie de direction* (Oy) *au voisinage de* $+\infty$ *.*

d) Montre que $D\ :y=1$ *asymptote au voisinage de* $-\infty$ *.*

e) Montrer que $f(x)=0$ *admet une seule solution* $\alpha\in[1;2]$.

2) a) Soit g la restriction de f sur $[0;+\infty[$, montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur un intervalle que l'on précisera, et préciser son sens de variation.

b) Tracer (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ dans un même repère

3) a) calculer $\int_a^b xe^x dx$ puis comparer : $\int_0^\alpha f(x)dx$ et $\int_\alpha^2 f(x)dx$.

b) calculer, en fonction de α, l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite $x=2$.

Partie B :

1) Soit $h(x)=\dfrac{5x}{e^x+1}$ pour tout x positive

a) Montrer que $h'(x)=\dfrac{5f(x)}{(e^x+1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de h.

c) Tracer (C_h) on précisera la demi tangente à l'origine

Exercice 3:

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x} & si\ x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2 cm)

1) a) prouver que, pour tout réel $t\geq 0$, $1-t\leq \dfrac{1}{1+t}\leq 1$.

b) En intégrant ces inégalités, établir que, pour tout $x\geq 0$; $x-\dfrac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x$

2) Soit $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x}$ avec $x\in[0;+\infty[$

a) Montrer que g est dérivable et calculer g'.

b) Prouver que , pour tout $x\geq 0$; $0\leq g'(x)\leq \dfrac{x^2}{2}$

c) En déduire que $0\leq g(x)\leq \dfrac{x^3}{12}$

3) a) calculer $f'(x)$

b) établir que pour tout $x\geq 0$, $g(x)\leq \ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$; puis en déduire le sens de variation de f.

4) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$

b) Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ puis déduire que f est dérivable en 0 et calculer

$f'(0)$, donner l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0 et présider la position de (C_f) par rapport à T.

5) dresser le tableau de variation de f puis tracer et T.

Exercice 4 :

Partie A

Soit $g(x)=e^x+x-5$

1) Etudier g

2) Calculer $g(0)$ et $g(2)$ montrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $\mathbb{R}$ une seule solution α

3) Justifier que : $1{,}30 \le \alpha \le 1{,}31$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]-\infty;5[$ par : $f(x)=\ln(5-x)$.

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2 cm)

1) Dresser le tableau de variation de f

2) Montrer que $f(\alpha)=\alpha$.

Partie C

1) Tracer (C_f) et Hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées $(x;y)$ tels que : $\begin{cases}\alpha \le x \le 4\\ 0 \le y \le f(x)\end{cases}$ On notera (Δ) cette partie A.

2) a) Montrer que : $\dfrac{x}{x-5}=1+\dfrac{5}{x-5}$

b) Montrer que $\displaystyle\int_\alpha^4 \frac{x}{x-5}dx=4-6\alpha$

Montrer que l'aire A de la partie (Δ) est $A=-\alpha^2+6\alpha-4$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=e^{\frac{1}{2x}}$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2 cm)

Partie A

Etude de f

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) dresser le tableau de variation de f

2) Tracer (C_f)

3) a) Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*)$; $e^t \geq 1+t$

b) Déduire que pour $x>0$; $f(x) \geq 1+\dfrac{1}{2x}$

4) Soit $k \geq 1$, on note $A(k)$ l'aire de la partie du plan déterminée par (C_f) , son asymptote horizontale et les droites d'équations $x=1$ et $x=k$ (l'unité graphique 2 cm)

a) Exprimer $A(k)$ sous forme intégrale

b) Démontrer que pour tout $k \geq 1$ on a : $A(k) \geq 2\ln k$

c) L'aire $A(k)$ admet-elle une limite finie lorsque k tend vert $+\infty$

Partie B

Soit $g(x) = f(x) - x$

1) Etudier g sur $]0\,;+\infty[$

2) a) Montrer que $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha > 0$

b) Etablir que $\dfrac{5}{4} \leq \alpha \leq \dfrac{3}{2}$

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 4x+1-xe^x$
on note par C sa courbe dans un repère orthonormé (unité 4 cm)
Etude de f
1) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ et déduire son signe
2) Dresser le tableau de variation de f '
3) Montrer que $f'(x)=0$ admet une seule solution α tel que $0,79 < \alpha < 0,80$
4) Etablir le tableau de variation de f
5) Montrer que $f(x)=0$ admet une solution unique entre β tel que $\dfrac{3}{2} < \beta < 2$
6) Construire C
7) a) Calculer $\int_0^u xe^x dx$; pour tout $u>0$

b) Déduire l'expression $I_u = \int_0^u f(x)dx$ en fonction de u

d) montrer que $e^\beta = \dfrac{4\beta+1}{\beta}$ et déduire que $I_\beta = 2\beta^2+\beta+1+\dfrac{1}{\beta}$

e) Soit $h(x) = \ln(4x+1)$, montrer $h(\beta) = \beta$

Exercice 7 :

Partie A

Soit $g(x)=1+x+e^x$

1) Etudier g

2) Montrer que $g(x)=0$ admet une seul solution α telle que $-1{,}3<\alpha<-1{,}2$.

3) Préciser le signe de $g(x)$

Partie B

Soit f la fonction définie sur par : $f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$, on désigne par C sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) dresser le tableau de variation de f

b) montrer que $f(\alpha)=1+\alpha$

c) montrer que $D: y=x$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$

d) Ecrire l'équation de la tangente T à C au point $O(0;0)$

Etudier la position de T par rapport à C

e)Tracer C

2) soit le point $H(x;0)$, la parallèle à l'axe(Oy) passant par H coupe C en M et la droite D en N On note $K(x)=MN$

a) montrer que $K(x)=\dfrac{x}{1+e^x}$

b) montrer que $K'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}g(-x)$

c) Déduire que MN est maximale en $(-\alpha)$

3) Montrer que $f(-\alpha)=1$

4) Montrer que la tangente au point A de C d'abscisse $(-\alpha)$ est parallèle à D

5) a) Montrer que pour tout $x\geq 1$; on a : $\dfrac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$

b) Déduire un encadrement de l'aire du plan limité par la courbe C, l'axe(Ox) et les droites d'équation : $x=1$ et $x=-\alpha$

Exercice 8:

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=2x+\frac{e^x}{1+e^x}$ *et* (C_f) *la courbe de f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1).a).Montrer que $\Omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ *est un centre de symétrie de* (C_f)

b).Vérifier que $\Omega\in(C_f)$*.Conclure.*

c). Déterminer une équation de la tangente T à au point Ω

2).Etudier f et tracer (C_f).

3) .Déterminer le nombre de solutions de l'équation :f x =m où m∈IR

4).a).Soit $\alpha>2$*.Calculer* $A(\alpha)$ *l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations* $x=\ln 2$; $x=\ln\alpha$ *et la droite* $D: y=2x+1$ *et la courbe* (C_f)

b).Calculer alors la limite de $A(\alpha)$ *quand x tend vers* $+\infty$

Partie B

Soit (I_n) *la suite définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :* $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x+1}dx$

1).Calculer I_1

2).Montrer que (I_n) *est décroissante*

3).a).Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; $\frac{1}{1+n}\leq I_n\leq\frac{\sqrt{2}}{1+n}$

b).En déduire que (I_n) *est convergente et calculer sa limite.*

4).a).Montrer que $(\forall x\in[0;1])$ *on a :* $0\leq\sqrt{2}-\sqrt{x+1}\leq\frac{1-x}{2}$

b). Montrer que : $\frac{\sqrt{2}}{1+n}-\frac{1}{n^2}\leq I_n\leq\frac{\sqrt{2}}{1+n}$

c). En déduire que (I_n) *est convergente et calculer sa limite .*