

Exercice 1 (14 points)

Partie I

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x^2) + \frac{1}{x} + 1$.

- 1) a) Calculer $g'(x)$; pour tout $x \in]0; +\infty[$.
- b) Dresser le tableau de variation de g .
- c) en déduire que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g(x) > 0$.

Partie II

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x \ln\left((\sqrt{x} - 1)^2\right)$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Montrer que : $D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; puis donner une interprétation géométrique au résultat.
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; puis étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 4) Etudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$; interpréter géométriquement le résultat.
- 5) a) Montrer que : $(\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[) ; f'(x) = \ln\left((\sqrt{x} - 1)^2\right) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$
- b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; 1[$.
- c) Montrer que : $(\forall x \in]1; +\infty[) ; f'(x) = g(\sqrt{x} - 1)$
- d) Déduire le signe de $f'(x)$ sur $]1; +\infty[$.
- e) Dresser le tableau de variation de f sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
- 6) a) Montrer que : $(\forall x \in]1; +\infty[) ; f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} g'(\sqrt{x} - 1)$.
- b) En déduire que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion à déterminer.
- c) Tracer (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 2 (6 points)

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2}$

- 1) a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $I = \left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.
- b) Montrer que : $f(I) \subset I$

2) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis calculer sa limite.