Exercice 1:

On donne les points $A(2;1;0)$; $B(1;2;2)$ et $C(3;3;1)$.

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) En déduire que les points A ; B et C ne sont pas alignés.

c) Montrer que: $x - y + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

d) Calculer le volume du tétraèdre OABC.

2) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan(ABC). Déterminer OH.

3) a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

b) Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC.

4) Soit S l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 5 = 0$.

a) Vérifier que (S) est une sphère dont on précisera les coordonnées du centre I et le rayon R.

b) Vérifier que les points A ; B et C appartiennent à (S).

c) En déduire l'intersection de la sphère (S) et le plan (ABC).

d) Donner des équations cartésiennes des plans (P1) et (P2) parallèles à (ABC) et tangents à (S).

Exercice 2:

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{10u_n - 81}{u_n - 8} \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 9$

b) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente

2) On pose pour tout n de IN ; $v_n = \dfrac{1}{u_n - 9}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n \geq 1$

b) Prouver que : $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $\mathbf{r = 1}$

c) Vérifier que $u_n = \dfrac{9v_n + 1}{v_n}$; pour tout n de IN ; puis déduit u_n en fonction den et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n - 8)}{u_n - 9}$

Exercice 3:

1) a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes C l'équation : $z^2 - 6z + 12 = 0$

(On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation tel que $\mathrm{Im}(z_1) > 0$)

b) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions z_1 et z_2

c) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe z_1^{2023}

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère le point A d'affixe $z_A = 3+i\sqrt{3}$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre le point O et d'angle $\frac{\pi}{6}$

a) Donner l'écriture complexe de la rotation R

b) Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est $z_B = \sqrt{3}+3i$

3) Soit I milieu de [AB] et C le symétrique de O par rapport au point I

a) Montrer que : $z_C = (3+\sqrt{3})(1+i)$

b) Montrer que OACB est un losange

c) Déduite une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{CI};\overrightarrow{CA}\right)$

Exercice 4

Dans une urne, il y a 2 boules vertes et 3 jaunes. On tire successivement deux boules dans l'urne en remettant la première boule tirée avant de prendre la deuxième. Si les deux boules tirées sont vertes, Jean donne 30 F à Vincent. Si elles sont jaunes Vincent donne 20 F à Jean. Si elles sont de couleurs différentes, Jean donne a francs à Vincent.

X est la variable aléatoire indiquant le gain (ou la perte) de Jean.

1. *Déterminer la loi de probabilité de X.*
2. *Calculer E(X) en fonction de a et déterminez a pour que le jeu soit équitable.*
1. *Lorsque l'ascenseur se déplace, il met 2 secondes pour démarrer, 4 secondes d'un niveau au niveau suivant et 2 secondes pour s'arrêter. L'ascenseur étant à l'arrêt, un client l'appelle du rez-de-chaussée. X est la variable aléatoire indiquant la durée d'attente du client, exprimée en secondes.*
   a. *Déterminez la loi de probabilité de X (on admet que si l'ascenseur est à l'arrêt au rez-de-chaussée, cette durée est nulle).*
   b. *Quelle est la durée d'attente moyenne pour un client appelant l'ascenseur au rez-de-chaussée ?*

Problème :

On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x$.

Soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1cm$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}$; puis interpréter géométriquement le résultat.

3. Etudier la branche infinie de (C_g) au voisinage de $+\infty$.

4. Montrer que $\forall x \in IR$; $g'(x)=\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}x}-1\right)$.

5. a. Montrer que g est décroissante sur $[0;+\infty[$.

b. Déduire que $\forall x \geq 0; 1-e^{-\frac{1}{2}x} \leq \frac{1}{2}x$.

6. Montrer que $\forall x \geq 0$; $\frac{1-e^{-\frac{1}{2}x}-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2x}$ et déduire $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-\frac{1}{2}x}-x}{x^2}$.

7. Construire (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4. a. Montrer que la fonction $G: x \mapsto 2e^{-\frac{1}{2}x}-\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$ est une primitive de g sur IR

b. Déduire que l'aire de la partie du plan délimitée par (C_g) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=4$ est $:A=2\left(e^{-2}-1\right)cm^2$.