



Exercice 1

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$; $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$

- 1) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont adjacentes
- 2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_{2n} = H_{2n} - H_n$
- 3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$
- 4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; T_{3n} = \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}H_{3n}$ et préciser sa limite
- 5) Montrer que la suite $(T_{3n})_{n \geq 1}$ est Convergente et préciser sa limite.
- 6) Montrer que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$; calculer les sommes suivantes :

- 1) $S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
- 2) $S_n = \sum_{k=0}^n (2^k + 4k + n - 3)$
- 3) $S_n = \sum_{k=0}^n (2^k 3^{n-k})$
- 4) $S_{28} = \sum_{k=4}^{32} \frac{k-5}{6}$
- 5) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$
- 6) $S_n = \sum_{k=1}^n k \times k!$

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$; calculer le produit : $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 4

- 1- A l'aide d'un changement d'indice retrouver la somme $S_n = \sum_{k=0}^n k$
- 2- En observant que $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$; retrouver la somme $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$

Exercice 5

Pour un entier naturel n non nul ; on considère la somme suivante : $S = \sum_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

Grâce à un changement d'indice ; montrer que $S = -S$; puis déduire que $S = 0$

Exercice 6

Montrer que pour tout $n \geq 1$; $\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \sum_{k=1}^n k^3$.