Problème (14 points)

Partie I

On considère la fonction g définie par : $g(x) = x - 1 - \ln x$

1- Etudier les variations de la fonction g et donner son tableau de variation

2- En déduire que : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; \ln x < x$

Partie II

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x} & si \; x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

1- a- Montrer que f est continue en 0 .

b- Montrer que f est dérivable en 0 et que : $f'(0) = 0$

2- Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ *et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.*

3- Etudier les variations de la fonction f et donner son tableau de variation.

4- Construire la courbe (C_f) *représentant f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie III

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1- Montrer que l'équation : $f(x) = \dfrac{1}{n}$ *; admet une unique solution* α_n *dans l'intervalle* $]1;e[$.

2- Montrer que la suite (α_n) *est décroissante.*

3- En déduire que (α_n) *est convergente.*

4- a- Montrer que : $\forall n \geq 2 \; ; \; \ln u_n = \dfrac{u_n}{n+1}$

b-Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln u_n) = 0$.

c- En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Solution

Partie I

1-Etude des variations de g.

La fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ *et* $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

Comme la fonction g est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ *alors le signe de* $g'(x)$ *est celui de* $(x-1)$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1 - \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ *(car :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ *)*
- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 1 - \ln x) = +\infty$ *(car :* $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ *)*

WWW.GUESSMATHS.CO

Tableau de variation de g

x	0 $\qquad\qquad$ 1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$

2- Déduisons que: $\forall x \in]0;+\infty[$, $\ln x < x$

On a d'après ce qui précède : $g(]0;+\infty[) = [0;+\infty[$ d'où : $\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) \geq 0$ et par suite :

$\forall x \in]0;+\infty[$; $x-1-\ln x \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq \ln x$ et comme : $x > x-1$ alors $\forall x \in]0;+\infty[$; $\ln x < x$.

Partie II

1- a- Continuité de f à droite en 0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x-\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{x-\ln x}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{x}{\ln x}-1} = -1 \quad (car : \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0)$$

On a: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$ et $f(0) = -1$

Donc f est continue à droite en 0.

b- Dérivabilité de f à droite en 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\ln x}{x-\ln x}-(-1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x + x - \ln x}{x(x-\ln x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x-\ln x)} = 0 \quad (car : \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x-\ln x)} = 0)$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'(0) = 0$.

2- Montrons que : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x-\ln x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{x-\ln x}{\ln x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{x}{\ln x}-1} = 0 \quad (car : \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{\ln x}-1\right)} = +\infty)$$

Interprétation géométrique :

Puisque $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ alors la courbe (C_f) admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

3- ***Etude des variations de f***

Les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x - \ln x$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$; de plus pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x - \ln x \neq 0$ car $\forall x \in]0;+\infty[$, $\ln x < x$; alors la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme rapport de ces deux fonctions ; et comme f est dérivable à droite en 0 alors elle est dérivable sur $[0;+\infty[$; pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-\ln x}\right)'$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\times(x-\ln x) - \ln x \times \left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}$$

$$= \frac{1-\cancel{\frac{\ln x}{x}} - \ln x + \cancel{\frac{\ln x}{x}}}{(x-\ln x)^2}$$

$$= \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

Et par suite: $\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$

<u>Sens de variation et tableau de variation de f</u>

On a : $\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ (x-\ln x)^2 > 0$ *d'où le signe de* $f'(x)$ *est celui de* $(1-\ln x)$ *; et :*

$1-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1$

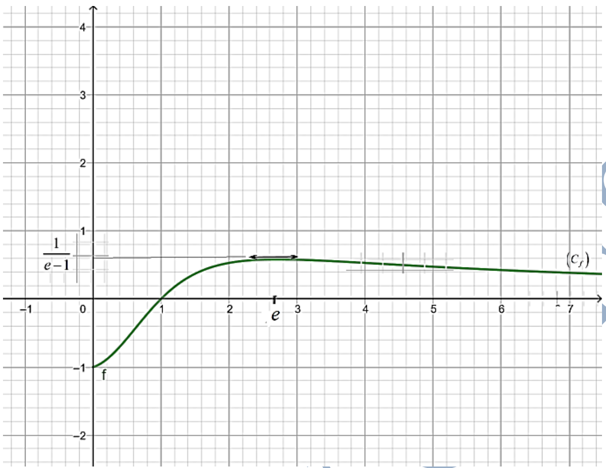
$\Leftrightarrow x \leq e$

D'où : ▪ $x \in [e;+\infty[;\ f'(x) \leq 0$ *et* $x \in [0;e[;\ f'(x) \geq 0$

<u>Tableau de variation de f</u>

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

- *Construction de la courbe* (C_f)



<u>Partie III</u>

1- La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]1;e[$ *donc f est une bijection de* $]1;e[$ *sur* $f(]1;e[) = \left]0;\dfrac{1}{e-1}\right[$ *Et on a :* $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\ ;\ \left]0;\dfrac{1}{e-1}\right[$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\ ;\ \exists! \alpha_n \in]1;e[\ /\ f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$.

Donc l'équation : $f(x) = \dfrac{1}{n}$ *admet une unique solution* α_n *dans* $]1;e[$.

2- Montrons que la suite (α_n) *est décroissante*

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\ ;\ f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$ *d'où* $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\ ; \alpha_n = f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\ ; \alpha_{n+1} - \alpha_n = f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Et comme $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ *dans* $\left]0;\dfrac{1}{e-1}\right[$ *et* f^{-1} *est strict croissante sur* $\left]0;\dfrac{1}{e-1}\right[$ *alors :* $f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right) < f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

WWW.GUESSMATHS.CO

Par conséquent $\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\right); \alpha_{n+1} < \alpha_n$.

Donc la suite (α_n) *est décroissante*

3- Convergence de la suite (α_n)

Puisque la suite (α_n) *est décroissante et minorée par 1 donc* (α_n) *est convergente*

4- a- Montrons que : $\forall n \geq 2 \ ; \ \ln(\alpha_n) = \dfrac{\alpha_n}{n+1}$

On a pour tout entier $n \geq 2$: $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow \dfrac{\ln \alpha_n}{\alpha_n - \ln \alpha_n} = \dfrac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow n \ln \alpha_n = \alpha_n - \ln \alpha_n$$
$$\Leftrightarrow n \ln \alpha_n + \ln \alpha_n = \alpha_n$$

$$\Leftrightarrow (n+1) \ln \alpha_n = \alpha_n$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha_n = \frac{\alpha_n}{(n+1)}$$

Donc $\forall n \geq 2 \ ; \ \ln \alpha_n = \dfrac{\alpha_n}{(n+1)}$

b- Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln \alpha_n) = 0$

On a : $\begin{cases} \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right); \ln \alpha_n = \dfrac{\alpha_n}{(n+1)} \\ \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right); 1 < \alpha_n < e \end{cases}$

d'où $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right); \dfrac{1}{n+1} < \ln \alpha_n < \dfrac{e}{n+1}$

Et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln \alpha_n = 0$

c- Déduisons $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

$\alpha_n > 0$ *; donc* $\alpha_n = e^{\ln \alpha_n}$ *d'où* $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{\ln \alpha_n} = e^0 = 1$ *car la fonction* $x \mapsto e^x$ *est continue en* 0.

WWW.GUESSMATHS.CO