Partie I

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-2+\ln x$

1) Etudier les variations de g.

2) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$ et que: $1<\alpha<2$.

b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 5.10^{-1}.

c) Montrer que : $\ln\alpha=2-\alpha^2$

3) Etudier le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$

et Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Déterminer la branche infinie de (C_f) au-voisinage de $+\infty$.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x}$.

b) Puis dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que : $f(\alpha)=\alpha^2(1+\alpha^2)$; puis déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $f(x)>0$.

3- Construire (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4- a) Montrer que si h est la restriction de f sur l'intervalle $[\alpha;+\infty[$; alors h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que h^{-1} n'est pas dérivable à droite en 0 ; et interpréter géométriquement le résultat.

c) Montrer que h^{-1} est dérivable en e^2+1 et calculer $(h^{-1})'(e^2+1)$.(on remarque que $f(e)=e^2+1$).