Exercice n°1.

Partie I

On considère la fonction numérique g *définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $g(x)=x^2-2\ln(x)$

1) *Etudier le sens de variation de* g

2) *En déduire le signe de* $g(x)$ *sur* $]0;+\infty[$

Partie II

On considère la fonction numérique f *définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1+\ln(x)}{x}$.

On appelle (C) *la courbe représentative*

de f *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité graphique : 2 cm)*

1) *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *; Interpréter graphiquement ce résultat.*

2) a) *Calculer* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ *; puis montrer que la droite* (Δ) *d'équation* $y=\dfrac{x}{2}$ *est asymptote à la courbe* (C).

b) *Déterminer la position de* (C) *par rapport à* (Δ) *sur* $]0;+\infty[$.

c) *Montrer que* (Δ) *coupe* (C) *en un point A que l'on précisera*

3) *Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de* f.

4) a) *Montrer qu'il existe un unique point B de la courbe* (C) *où la tangente* (T) *est parallèle à* (Δ).

b) *Préciser les coordonnées du point B*

5) a) *Montrer que l'équation* $f(x)=0$ *admet une unique solution* α *dans* $]0;+\infty[$.

b) *Exprimer* $\ln(\alpha)$ *en fonction de* α.

c) *Montrer que le coefficient directeur de la tangente à* (C) *au point d'abscisse* α *est supérieur à* 1. *(On admettra que* $0{,}31<\alpha<0{,}35$ *)*

6) *Représenter succinctement la courbe* (C) *et les droites* (Δ) *et* (T).

Exercice n°2

Partie I

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=x-2+\dfrac{1}{2}\ln(x)$

1) *Etudier le sens de variations de* f. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ *; puis dresser le tableau de variations de f.*

2) a) *Montrer que l'équation* $f(x)=0$ *admet une unique solution* α *dans l'intervalle* $]0;+\infty[$.

b) Déterminer l'entier n tel que $\alpha \in]n;n+1[$

3) Déterminer le signe de $f(x)$.

Partie II

La fonction g est définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(0)=0 \\ g(x)=-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}\ln x \quad si\ x>0 \end{cases}$

1) a) Montrer que la fonction g est continue en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) Montrer que pour tout $x>0$, $g'(x)=x\,f\left(\frac{1}{x}\right)$

3) a) Montrer que $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

4) a) Donner les équations des tangentes à la courbe Γ représentative de g aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{\alpha}$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ et interpréter graphiquement cette limite.

5) Tracer Γ et ses tangentes dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice n°3

On considère la suite (u_n) de réels strictement positifs, définie par : $u_0=2$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$; $\ln(u_{n+1})=1+\ln(u_n)$.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n).

2) Déterminer la monotonie de la suite (u_n), et préciser sa limite.

3) Exprimer la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

4) Exprimer la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(u_k)$ en fonction de n. En déduire le calcul de $u_1\times u_2\times\cdots\times u_n$ en fonction de n.

Exercice n°4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right) \quad si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$; f est-elle dérivable en 0 ?

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; puis étudier le sens de variations de f.

3) *Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation* $f(x)=0$ dans $[e;+\infty[$.

4) *Soit T la tangente à la courbe représentative (C) de f au point d'abscisse* 1. *Déterminer l'équation de T.*

5) *Tracer la courbe représentative (C) de f et la droite T dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

6) *Soit* $\lambda\in]0;e]$. *On pose :* $I(\lambda)=\int_{\lambda}^{e}f(x)dx$

a) *Calculer* $I(\lambda)$ *pour* $\lambda\in]0;e]$

b) *Calculer la limite de* $I(\lambda)$ *lorsque* λ *tend vers* 0.

c) *En déduire l'aire de la partie d plan limité par la courbe (C) ; l'axe des abscisses et les*

droites d'équations respectives $x=0$ *et* $x=e$.

Exercice n°5

1. On considère la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x}{x^2+x+1}$

Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ *et déterminer la fonction dérivée f' de f.*

2. On considère la fonction $g:x\mapsto\dfrac{\ln x}{(\ln x)^2+\ln x+1}$ *; et on désigne par* ς *sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unités graphiques 1 cm.*

a. Exprimer g en fonction de f et préciser le domaine de définition de g.

b. Déterminer la fonction dérivée g' *de g. (on pourra utiliser la question* 1.)

c. Etudier le signe de $g'(x)$.

d. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de g .

e. Dresser le tableau des variations de g.

f. Construire la courbe ς *en précisant la tangente au point d'abscisse* 1.

Exercice n°6

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ *par:* $f(x)=x-\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

Partie A: *Étude de certaines propriétés de la courbe Γ*

1. On note f ' la fonction dérivée de f.

Calculer $f'(x)$ *pour tout x de l'intervalle* $]-1;+\infty[$.

2. Pour tout x de l'intervalle $]-1;+\infty[$ *on pose* $h(x)=(1+x)^2-1+\ln(1+x)$.

Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

Calculer $h(0)$. *En déduire les variations de f.*

3. Soit D la droite d'équation $y=x$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe Γ et de la droite D.:

Partie B : *Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f.*

1. Démontrer que si $x\in[0;4]$, *alors* $f(x)\in[0;4]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$.

a. Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe Γ et la droite D, placer les points

de Γ d'abscisses u_0 , u_1, u_2 et u_3.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0;4]$.

c. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.

e. Utiliser **la partie A** pour donner la valeur de ℓ.

Exercice n°7

1. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} & si \;\; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Montrer que f est continue à droite en 0.

2. a. Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$$

Calculer $g(0)$ et en déduire que sur $\mathbb{R}^+$; $\ln(1+x) \le \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right)$

b. Par une étude analogue, montrer que si $x \ge 0$, alors ; $\ln(1+x) \ge x - \dfrac{x^2}{2}$

c. Établir que pour tout $x > 0$ on a : $-\dfrac{1}{2} \le \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} \le -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3}$

En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$

3. a. Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x)$

Étudier les variations de h et en déduire le signe de $h(x)$ sur $[0;+\infty[$

b. Montrer que sur $[0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$

c. Dresser le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$.

d. On désigne par C la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé .

Construire la tangente T à C au point d'abscisse 0.

Montrer que C admet une asymptote. Tracer la courbe C.

Exercice n°8

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^2+4)$.

PARTIE A

1. *Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle* $[0;+\infty[$.

2. *Soit g la fonction définie sur l'intervalle* $[0;+\infty[$ *par :* $g(x)=f(x)-x$.

   a) *Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle* $[0;+\infty[$.

   b) *Montrer que sur l'intervalle* $[2;3]$ *l'équation* $g(x)=0$ *admet une unique solution que l'on notera* α .

   Donner un encadrement de α *à* 10^{-1}.

   c) *Justifier que le nombre réel* α *est l'unique solution de l'équation* $f(x)=x$.

PARTIE B

On considère la suite (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \qquad (\forall n\in \mathbb{N}) \end{cases}$.

La courbe C représentative de la fonction f et la droite (Δ) *d'équation* $y=x$ *sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).*

1. À partir de u_0 *en utilisant la courbe C et la droite* (Δ), *on a placé* u_1 *sur l'axe des abscisses.*

De la même manière, placer les termes u_2 *et* u_3 *sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.*

2. Placer le point i de la courbe C qui a pour abscisse a.

3. a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $1\le u_n\le\alpha$.

b) Montrer que la suite (u_n) *converge.*

c) Déterminer sa limite.