Session 2022 Session normale

Examen National baccalauréat 2éme Bac PC-SVT

Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$

b) En déduire que $x+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,1,2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$

Déterminer une équation de la sphère (S)

3) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

4) On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées.

c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$, puis en déduire la distance $d\left(A,(\Delta)\right)$

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(0;\vec{u};\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a=-1-i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b=-1+i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

1) Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation est $d=-2$.

2) On considère la rotation R de centre D et d'angle $\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c=-4$.

3) a) Ecrire le nombre $\dfrac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique

b) En déduire que $\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)^2=\dfrac{c-d}{b-d}$

4) Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O ct de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ')

a) Vérifier que $|z+2|=2$

b) Prouver que $z+\overline{z}=-8$ (remarquer que $|z|=4$)

c) En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera

Exercice 3

Une urne contient dix boules: trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard simultanément trois boules de l'urne.

1) Montrer que $p(A)=\frac{1}{6}$; où A est l'évènement "N'obtenir aucune boule rouge"

2) Calculer $p(B)$; où B est l'évènement "Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes"

3) Montrer que $p(C)=\frac{1}{2}$; où C est l'évènement "Obtenir exactement une boule rouge"

4) Calculer $p(D)$; où D est l'évènement " Obtenir au moins deux boules rouges "

Exercice 4

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=(x+1)e^x$

1) a) Vérifier que $x\mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$; puis calculer $I=\int_{-1}^{0}h(x)dx$.

b) A l'aide d'une intégration par parties calculer $J=\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^x dx$

2) a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y''-2y'+y=0$

b) Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0)=1$ et $h'(0)=2$

Problème

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1cm)

1) Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)$ f(x) et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f(x)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

b) Etudier le signe de $(f(x)-x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ)

4) a) Montrer que $f'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

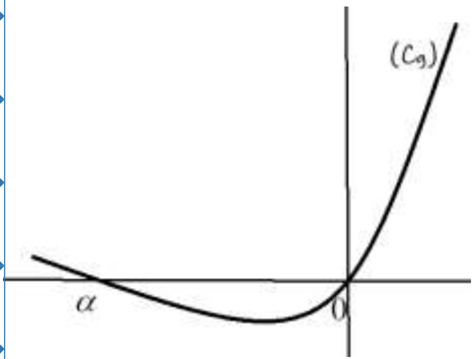
b) Vérifier que $x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

5) a) Montrer que : $f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$; où $g(x)=(2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4$ pour tout x de $\mathbb{R}$

b) A partir de la courbe ci-contre de la fonction g. déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

(Remarque : $g(\alpha)=0$)



c) Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.

6) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (On prend: $\ln(4) \simeq 1{,}4$, $\alpha \simeq -4{,}5$ et $f(\alpha) \simeq -3{,}5$)

7) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln 4)$

8) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d) Calculer la limite de la suite (u_n)