

**Exercice 4**

on considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1- a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .  
 b. Interpréter géométriquement les deux résultats trouvés.
- 2 a. Montrer que :  $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .  
 b. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 3- a. Montrer que le point  $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$  est un centre de symétrie de la courbe  $(C)$   
 b. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point  $I$ .  
 c. Tracer dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , la tangente  $(T)$  et la courbe  $(C)$ .
- 4 a. Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle  $]0; 1[$ .  
 b. Montrer que :  $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$  pour tout  $x$  de  $]0; 1[$ .

**Correction Exercice 4**

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

- 1) a. Calculons:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a:  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1}$

Alors : ■  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} = 1$  (Car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ )

■  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0$  (Car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ )

D'où:  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$  et  $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}$

b. Interprétation géométrique:

■ On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  Donc la droite d'équation  $y = 1$  est une asymptote horizontale à  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$

■ Et on a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  donc, la droite d'équation  $y = 0$  est une asymptote horizontale à  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$ .

- 2) a. Montrons que:  $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

Les fonctions  $x \mapsto e^x$  et  $x \mapsto 1+e^x$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on a :

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \left( \frac{e^x}{1+e^x} \right)' \\ &= \frac{e^x \times (1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \boxed{f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}}$$

b. Tableau de variations de  $f$

On a :  $e^x > 0$  et  $(e^x + 1)^2 > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , donc :  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , d'où  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

D'où le tableau de variations de  $f$  est le suivant

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

3) a. Montrons que le point  $I \left( 0; \frac{1}{2} \right)$  est un centre de symétrie de  $(C)$ :

On a :  $(\forall x \in \mathbb{R}); (-x \in \mathbb{R})$  et

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{e^x+1} \\ &= \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} \\ &= 1 - f(x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \boxed{f(-x) = 1 - f(x)}$$

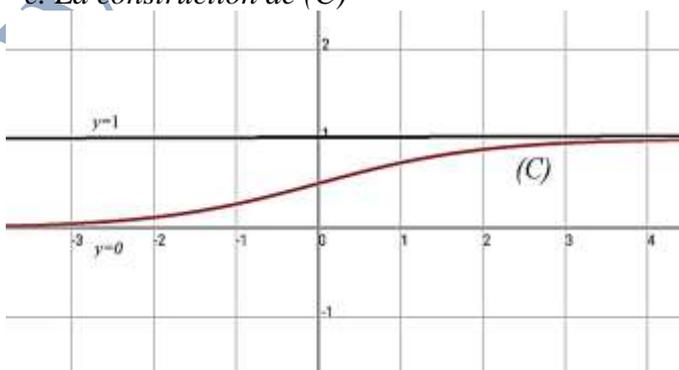
D'où le point  $I \left( 0; \frac{1}{2} \right)$  est un centre de symétrie de la courbe  $(C)$ .

b. Déterminons une équation de la tangente  $(T)$  au point  $I$ : On a :  $f(0) = \frac{1}{2}$  et  $f'(0) = \frac{1}{4}$

Donc une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point  $I$  est :  $y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$

$$\text{D'où: } \boxed{(T): y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}$$

c. La construction de  $(C)$



4) a. Montrons que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ . La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ; donc  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle  $f(\mathbb{R})$  telle que:

$$f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = ]0;1[$$

b) Montrons que  $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$  tout  $x \in ]0;1[$

Soit  $x \in ]0;1[$  et  $y \in \mathbb{R}$  tels que :  $f^{-1}(x) = y$

On a :  $f^{-1}(x) = y$

$$\Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow \frac{e^y}{e^y + 1} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^y + 1 - 1}{e^y + 1} = x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{e^y + 1} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^y + 1} = 1 - x \Leftrightarrow e^y + 1 = \frac{1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow e^y = \frac{1}{1-x} - 1 \Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

Donc :  $(\forall x \in ]0;1[) ; \boxed{f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}$