

Exercice 1:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) a) Calculer u_1 .

b) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$.

2) a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 2)^2}{u_n + 1}$.

b) En déduire la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, justifier qu'elle est convergente.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$.

a) Montrer que : la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$.

b) Exprimer v_n en fonction de n ; en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{4n + 12}{2n + 3}$.

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ en justifiant la réponse.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = v_0 u_0 + v_1 u_1 + \dots + v_n u_n$.

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); S_n = \frac{n^2 + 7n + 6}{3}$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(S_n)}{\ln n}$.

Exercice 2:

I- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation: $(E): z^2 - 2(1 - \sqrt{2})z + 2(2 - \sqrt{2}) = 0$

1) a) Montrer que le discriminant de (E) est: $\Delta = -4$.

b) En déduire les solutions de (E) z_1 et z_2 tels que: $\text{Im}(z_1) < 0$.

2) a) Calculer $|z_1|$, puis montrer que: $(1+i)z_1 = -\sqrt{2} \times \bar{z}_1$.

b) Déduire z_1 sous forme trigonométrique, puis calculer $\cos\left(\frac{11\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{8}\right)$.

II- On considère les points E ; F et G d'affixes respectifs: $z_E = 1+i$; $z_F = 1-i$ et $z_G = -i\sqrt{3}$

1) Soit N l'image de F par l'homothétie h de centre G et de rapport 2.

Montrer que l'affixe de N est: $z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$.

2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On pose: $A = r(G)$ et $C = r(N)$.

Montrer que : $z_A = \sqrt{3}$ et $z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i$.

3) Soit t la translation de vecteur $\vec{w}(2i)$.

On pose : $B = t(N)$ et $D = t(G)$.

Montrer que: $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ et $z_D = (2 - \sqrt{3})i$.

4) a) Montrer que E est milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. Que peut-on déduire?

b) Vérifier que : $\frac{z_C - z_E}{z_B - z_E} = i$; en déduire la nature du triangle BCE.

c) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

Exercice 3:

Un sac contenant 8 boules indiscernables au toucher ; 5 Boules rouges, 3 boules blanches.
On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

1) On considère l'événement :

A : «le tirage contient exactement deux boules rouges» ; Montrer que : $p(A) = \frac{2}{15}$

2) Soit X la variable aléatoire liant chaque tirage au nombre de boules rouges restantes dans le sac après le tirage des 3 boules.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

b) Calculer $E(X)$

Exercice 4:

On considère les points $A(-1; -1; 1)$; $B(-1; 2; -2)$ et le plan (P) dont une équation cartésienne est : $x + y + z - 2 = 0$.

1) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan (P) .

2) Soit α un réel et (S_α) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tel que :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2\alpha y + 2\alpha z + \alpha^2 + \alpha = 0.$$

a- Montrer que, pour tout réel α , (S_α) est une sphère de centre I_α et de rayon

$$R = \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}.$$

b- Montrer que, quand α varie dans $\mathbb{R}$, I_α décrit la droite (AB) .

3) Etudier suivant les valeurs de α , les positions relatives de (S_α) et du plan (P) .

4) Soit I le milieu de $[AB]$ et $I_{1-\alpha}$ le centre de la sphère $(S_{1-\alpha})$.

a- Montrer que I est le milieu de $[I_\alpha I_{1-\alpha}]$

b- En déduire que les sphères (S_α) et $(S_{1-\alpha})$ sont symétriques par rapport au point I .

Problème:

I- Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$.

1) a) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[) : g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$.

b) En déduire la monotonie de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2) Calculer $g(1)$; justifier que : $(\forall x \in]0; 1]) : g(x) \leq 0$ et que $\forall x \in [1; +\infty[: g(x) \geq 0$

II- On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$, puis en déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$.

puis en déduire que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

2) a) Vérifier que : $(\forall x \in]0; +\infty[) : f(x) = \frac{x^2 + 1 - 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2 - 2}{x}$.

b) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

3) a) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[) : f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation complet de f en justifiant la réponse.

4) a) Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

b) Montrer géométriquement que l'équation $(E) : \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $[0; +\infty[$.

b) Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

6) a) Montrer que : la fonction $K : x \rightarrow x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $k : x \rightarrow \ln x$ sur $]0; +\infty[$

b) En déduire que : $\int_1^e \ln(x) dx = 1$.

c) En utilisant une intégration par parties, calculer la surface délimitée par la courbe (C_f) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.