Série 10 d'exercices non corrigés « dérivabilité et étude de fonction »

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\left[-1;+\infty\right[$ *par :* $f(x)=\sqrt{x^2(x+1)}$.

On désigne par (C) *sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats trouvés
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 *et interpréter géométriquement le résultat trouvé.*

2) a) Montrer que f est dérivable sur $\left]-1;+\infty\right[-\{0\}$ *et que pour tout* $x\in\left]-1;+\infty\right[-\{0\}$ *:*

$$f'(x)=\frac{x(3x+2)}{2\sqrt{x^2(x+1)}}$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Donner l'équation de la tangente (T) *à* (C) *au point d'abscisse 0. Interpréter géométriquement le résultat.*

3) Tracer la courbe (C).

4) Tracer la courbe (C') *symétrique de* (C) *par rapport à* (Ox) *dans le même repère que* (C).

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par: $f(x)=x\sqrt{1-x}$

1- a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter géométriquement *le résultat obtenu*

c) Montrer que f est dérivable sur $\left]-\infty;1\right[$ *et que pour tout* $x<1$ *:* $f'(x)=\dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$

d) Dresser le tableau de variation de f.
e) Représenter graphiquement la fonction f

2- a) Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$ *admet une seule solution* x_1 *dans* $\left]-\infty;0\right]$ *et que :* $-\dfrac{1}{3}<x_1<0$

b) Montrer que Equation $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ *admet exactement deux 2 solutions* x_2 *et* x_3 *dans* $[0;1]$ *et que*

$0<x_2<\dfrac{2}{3}<x_3<1$

Donner une valeur décimale approches à 10^{-3} *près de* x_1.

3. a) On pose $u=\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$ *; Montrer que l'équation* $(E):\left|x\sqrt{1-x}\right|=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ *est équivalente à*

(E'): $8u^3-6u-1=0$.

b) Pour $i\in\{1;2;3\}$ *, on pose :* $u_i=\dfrac{3}{2}\left(x_i-\dfrac{1}{3}\right)$

Montrer qu'il existe un unique réel θ_i *, de* $[0;\pi]$ *tel que :* $u_i=\cos\theta_i$

c) Prouver que : $\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ *pour tout réel* θ.

d) Déduire des questions précédentes que $\left(E'\right)$ *est équivalente à Equation* $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}$

Résoudre cette équation dans $\left[0;\pi\right]$ *et en déduire les valeurs exacts de* $x_1; x_2; x_3$.