

Exercice 2 :(avec solution)

Soit la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2}{3-U_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1/ Calculer U_1 et U_2 .

2/ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) (1 < U_n < 2)$

3/ Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{3 - U_n}$

Puis déduire la monotonie de (U_n)

Correction Exercice 2 :

1-
$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2}{3-U_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} \bullet U_1 &= \frac{2}{3-U_0} \\ &= \frac{2}{3-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2 \times 2}{3-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet U_2 &= \frac{2}{3-U_1} \\ &= \frac{2}{3-\frac{4}{3}} \\ &= \frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

2/ On a : $U_0 = \frac{3}{2}$ donc $1 < U_0 = \frac{3}{2} < 2$ la proposition $((\forall n \in \mathbb{N}) 1 < U_n < 2)$ est vraie pour $n = 0$.

Supposons que pour $((\forall n \in \mathbb{N}) 1 < U_n < 2)$ et montrons que $1 < U_{n+1} < 2$

On a :

$$\begin{aligned} 1 < U_n < 2 &\Rightarrow -2 < -U_n < -1 \\ &\Rightarrow 1 < 3 - U_n < 2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{3 - U_n} < 1 \\ &\Rightarrow 1 < \frac{2}{3 - U_n} < 2 \\ &\Rightarrow 1 < U_{n+1} < 2 \end{aligned}$$

Donc la proposition $(1 < U_n < 2)$ est vraie pour $(n+1)$.

Conclusion : On a montré par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 < U_n < 2$.

3/

$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} - U_n &= \frac{2}{3 - U_n} - U_n \\&= \frac{2 - U_n(2 - U_n)}{3 - U_n} \\&= \frac{U_n^2 - 2U_n + 2}{3 - U_n}\end{aligned}$$

$$\text{On a : } U_n^2 - 2U_n + 2 = (U_n - 1)(U_n - 2) \Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{3 - U_n}$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{3 - U_n}$$

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) 1 < U_n < 2 \Rightarrow \begin{cases} U_n - 1 > 0 \\ U_n - 2 < 0 \\ 3 - U_n > 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - U_n < 0$$

Donc : (U_n) est une suite strictement décroissante.