EX 01 :

1- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

b) Ecrire des solutions trouvez sous forme exponentielle.

2- On pose : $U=\frac{1}{2}\left((1-i)+\sqrt{3}(1+i)\right)$

a) Calculer U^2

b) Déterminer la forme exponentielle du nombre U

c) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3- On considère dans le plan les points A, B ; C et D d'affixes respectives $a=\sqrt{3}-i$ *;* $b=\sqrt{3}+i$ *;* $c=2i$ *et* $d=\sqrt{3}a+c$

Montrer que le quadrilatère DABC est un losange

4- Soit H l'homothétie du centre C et qui transforme le point B en D

a) Déterminer le rapport de l'homothétie H.

b) déterminer l'affixe du point E sachant que $E=H(A)$

EX02 :

Partie I

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2-\sqrt{2}z+2=0$

On considère le nombre $d=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$

2- Montres que : $d=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

3- Vérifier que : $d^6\in\mathbb{R}$

Partie II

Dans le plans complexe on considère les points A, B et C d'affines respectives :
$a = 4 - 4i\sqrt{3}$; $b = 8$ et $c = 12 - 4i\sqrt{3}$

Soit z l'affixe du point M et z' l'affixe de point M' image du point M par la notation R de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

4) Exprimer z' en fonction de z

6) Vérifier que : $A = R(B)$ et CAB est un triangle équilatéral.

EX 03 :

Dans le plan on considère les pointe A, B, C et D d'affines respectives $a = -2i$; $b = 7 - i$; $c = 8 + 2i$ et $d = -1 + 5i$

1) Montrer que : $\frac{d-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

2) Montrer que : $\frac{d-c}{b-c} \in i\mathbb{R}$

3) en déduire que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle (sont cocycliques)

EX 04 :

1) Soient p et q deux réels.

Montrer que : $\left(e^{i\left(\frac{p-q}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{p-q}{2}\right)}\right)e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)} = e^{ip} + e^{iq}$

2) En déduire que : $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(e^{i\frac{\pi}{24}} + e^{-i\frac{\pi}{24}}\right)e^{i\frac{7\pi}{24}}$

3) Déterminer une écriture exponentielle du nombre $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{4}}$

4) Donner une écriture trigonométrique du complexe $\left(1 + i\sqrt{3} + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)$; puis en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$

5) Montrer que : $\left(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{24} \in \mathbb{R}$

EX 05 :

I/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2-2\left(1+\sqrt{2}\right)z+4+2\sqrt{2}=0$

II/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ *; on considère les points A, B, C et D d'affines respectives* $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}\,;b=1+\sqrt{2}+i\,;c=\overline{b}$ *et* $d=2i$

1) Ecrire le nombre a sous forme trigonométrique

2) a) vérifier que $b-d=c$

b) Montrer que $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(b-a\right)=b-d$ *et déduire que les points A, B et D sont alignes*

3) a) vérifier que : $ac=2b$

b) En déduire que $2\arg\left(b\right)\equiv\frac{\pi}{4}\left[2\pi\right]$

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ *et que transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point* M' *d'affixe* z'

a) Montres que ; $z'=\frac{1}{2}az$

b) En déduire que $R\left(C\right)=B$ *et que* $R\left(A\right)=D$

c) Montres que $\frac{b-a}{c-a}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.a$ *; puis on déduire une mesure de angle* $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$

EX 06 :

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2-14z+85=0$

- le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2\right)$.

On considère les points A, B et C d'affines respectives : $a=1+2i\,;b=3-i$ *et* $c=6+i$

2- a) Ecrire le nombre complexe sous forme exponentielle $\frac{b-a}{b-c}$

b) Déduire la nature du triangle ABC

3- Déterminer D l'image du point A par la translation t de vecteur $\vec{w}$ *d'affixe* $6+4i$

4- Calculer $\frac{c-b}{d-a}$; puis déduire que le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle

5- a) Soit E un point d'affixe $m=-1$; déterminer $arg\left(a-m\right)$

b) déduire le mesure d'angle $\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{EA}\right)$

EX 07 :

Pour tout z de $\mathbb{C}$, on définit le polynôme $P\left(z\right)=z^3+2\left(\sqrt{2}-1\right)z^2+4\left(1-\sqrt{2}\right)z-8$

1) calculer $P\left(2\right)$

2) déterminer a et b tel que $P\left(z\right)=\left(z-2\right)\left(z^2+a.z+b\right)$

3) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+2\sqrt{2}.z+4=0$

12) découvre les solutions de l'équation $P\left(z\right)=0$

4) dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a=2$; $b=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $c=\overline{b}$

a) Démontrer que le triangle OAB isocèle

b) soit I le milieu du segment : $\left[AB\right]$ déterminer une mesure de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OI}\right)$

c) calculer l'affine z_I du point I ; puis déduire $\left|z_I\right|$

d) Déduire des résultats précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$