Examen Normalisé n° 41 **2éme Bac PC**

Exercice 1 (3.5pt)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{4} \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4} \quad ; \forall n \in IN \end{cases}$

1) a) Déterminer les réels a et b tels que pout tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = a + \dfrac{b}{u_n+4}$

b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in IN$; $-2 < u_n < 1$.

2) a) Vérifier que pour tout $n \in IN$; $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n+2)(1-u_n)}{u_n+4}$.

b) Déduire que la suite (u_n) est croissante puis qu'elle est convergente.

3) On pose : $\forall n \in IN$; $v_n = \dfrac{u_n+2}{1-u_n}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{5}{2}$

b) Donner v_n en fonction de n.

c) Déduire u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 2 (3pt)

1) Résoudre dans l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$; on considère les points A ; B ; C et D d'affixes respectifs : $a = \sqrt{3} + i$; $b = \sqrt{3} - i$; $c = -1 - i\sqrt{3}$ et $d = \bar{c}$.

a) Montrer que $\dfrac{d-b}{a-c} = i$; puis déduire que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales.

b) Ecrire le nombre complexe c sous la forme exponentielle puis déduire que :

$\arg(d) \equiv -\dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$.

c) Montrer que c^{12} est un nombre réel.

3) Soit F l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $k = -2$

Montrer que l'affixe de F est $z_F = \sqrt{3} - 5i$.

Exercice 3 (4pt)

1) Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $2e^{2\ln x} - \dfrac{5}{e^{-\ln x}} + 3 = 0$; b) $\sqrt{e^{2x}} \times e^{x-1} = (e^x)^3$; c) $\ln\left(\dfrac{2x-3}{x+1}\right) = 0$

2) Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $\sqrt{e^{2x}} \times e^{x-1} \geq (e^x)^3$; b) $(e^x - 1)\ln x \leq 0$; c) $\sqrt[3]{x-1} \geq 2$

3) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-2xe^{x}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x-\ln(x)\right)$

4) Calculer the les intégrales suivantes : $A=\int_0^{e-1}\dfrac{1}{x+1}dx$; $B=\int_0^{\pi}\text{Sin}x.e^{\cos x}dx$; $C=\int_1^{e}\dfrac{\ln x}{x}dx$

<u>Problème</u> (10.5pt)

Partie I

Sot g la fonction définie sur IR par : $g(x)=e^{x}-2x+2$.

1) Calculer $g'(x)$; pour tout $x\in IR$.

2) a) Montrer que : $g'(x)\geq 0$; $\forall x\in[\ln 2;+\infty[$ et $g'(x)\leq 0$; $\forall x\in]-\infty;\ln 2]$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction g sur IR .

c) Déduire que : $g(x)\geq 0$; pour tout $x\in IR$. (on admet que $g(\ln 2)>0$).

Partie II

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1+\dfrac{x}{e^{x}}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (unité: 2cm)

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; puis interpréter géométriquement les résultats obtenues.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

b) Montrer que (C) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+1$ au voisinage de $+\infty$.

c) Etudier la position relative de (C) et de la droite (D).

3) a) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2e^{x}}$; pour tout $x\in IR$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur IR .

c) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha\in]-1;0[$ tel que : $f(\alpha)=0$.

4) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (Cp) au point d'abscisse $x_0=0$.

5) Montrer que : $f''(x)=\dfrac{x-2}{e^{x}}$; pour tout $x\in IR$; déduire que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

6) Tracer dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la droite (D) ; la tangente (T) et la courbe (C).

7) a) Montrer que la fonction $x\mapsto\dfrac{x+1}{e^{x}}$ est une fonction primitive de la fonction $x\mapsto-\dfrac{x}{e^{x}}$ sur IR .

b) Calculer en cm², l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C) ; la droite (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.