Correction Examen nationale 2010 Session de Normale

2éme Bac SM A et B

Exercice 1 :

I- $(\forall(a,b)\in I\times I)$; $a*b=e^{\ln(a).\ln(b)}$

1) • Pour tout $(a,b)\in I\times I$; on a : $a*b=e^{\ln(a).\ln(b)}$

$$=e^{\ln(b).\ln(a)}$$

$$=b*a$$

Donc la loi $*$ est commutative.

• pour tout les éléments a ; b et c de I ; on a :

$$a*(b*c)=e^{\ln(a).\ln(b*c)}$$

$$=e^{\ln(a).\ln\left(e^{\ln(b).\ln(c)}\right)}$$

$$=e^{\ln(a).\ln(b).\ln(c)}$$

$$=\left(e^{\ln(a).\ln(b)}\right)^{.\ln(c)}$$

$$=(a*b)^{\ln(c)}$$

$$=\left(e^{\ln(a*b)}\right)^{\ln(c)}$$

$$=e^{\ln(a*b).\ln(c)}$$

$$=(a*b)*c$$

Donc la loi $*$ est associative.

2) Soit ε l'élément neutre de la loi $*$ dans I.

Pour tout $a\in I$ on a : $a*\varepsilon=\varepsilon*a=a\Rightarrow a=e^{\ln(a).\ln(\varepsilon)}$

$$\Rightarrow \ln a=\ln e^{\ln(a).\ln(\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \ln a=\ln a.\ln\varepsilon$$

$$\Rightarrow \ln\varepsilon=1$$

$$\Rightarrow \varepsilon=e$$

Donc e est l'élément neutre pour la loi $*$ dans I

3) a) • On a : $\mathcal{I}-\{1\}\subset\mathcal{I}$; donc la loi $*$ est commutative et associative dans $\mathcal{I}-\{1\}$

D'autre part e est l'élément neutre pour la loi $*$ dans $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}-\{1\}\subset\mathcal{I}$; et comme il est unique alors e est l'élément neutre pour la loi $*$ dans $\mathcal{I}-\{1\}$

• Pour $x\in\mathcal{I}-\{1\}$; résolvons dans $x\in\mathcal{I}-\{1\}$ l'équation d'inconnue x' :

$x*x'=e\Rightarrow e^{\ln(x).\ln(x')}=e$ ($*$ est commutative et associative dans $\mathcal{I}-\{1\}$)

$$\Rightarrow \ln(x).\ln(x')=1$$

$$\Rightarrow \ln(x')=\frac{1}{\ln(x)}$$

$$\Rightarrow x'=e^{\frac{1}{\ln(x)}}$$

Et comme $x\in\mathcal{I}-\{1\}$ alors $\ln(x)\neq 0$; d'où $\frac{1}{\ln(x)}\in\mathbb{R}^*\Rightarrow x'=e^{\frac{1}{\ln(x)}}\in(\mathcal{I}-\{1\})$

Donc tout élément de $\mathcal{I}-\{1\}$ est admet un symétrique dans $\mathcal{I}-\{1\}$ pour la loi $*$

On déduit donc que $(\mathcal{I}-\{1\},*)$ est un groupe commutatif.

b) • $]1,+\infty[$ est une partie non vide de $\mathcal{I}-\{1\}$ (car $e\in]1,+\infty[$)

• Soit $(x,y)\in(]1,+\infty[)^2$; et soit y' le symétrique de y dans $\mathcal{I}-\{1\}$ pour la loi $*$

On a : $x*y'=e^{\ln(x).\ln(y')}$

$$=e^{\ln(x).\frac{1}{\ln(y)}}$$

$$=e^{\frac{\ln(x)}{\ln(y)}}$$

D'autre part on a : $\begin{cases}x>1\\ y>1\end{cases}\Rightarrow\frac{\ln(x)}{\ln(y)}>0$; donc $e^{\frac{\ln(x)}{\ln(y)}}>1$

D'où $(x*y')\in]1,+\infty[$

On conclut que : $\left(\forall(x,y)\in(]1,+\infty[)^2\right)$; $(x*y')\in]1,+\infty[$ où y' est le symétrique de y dans $\mathcal{I}-\{1\}$ pour la loi $*$

Par suite $(]1,+\infty[,*)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{I}-\{1\},*)$

4) a) Soient a ; b et c des éléments de $\mathcal{I}$; on a :

$a*(b\times c)=e^{\ln(a).\ln(b\times c)}$

$$= e^{\ln(a).(\ln(b)+\ln(c))}$$

$$= e^{\ln(a).\ln(b)+\ln(a).\ln(c)} \qquad (* \text{ est distributive par rapport à } \times)$$

$$= e^{\ln(a).\ln(b)} \times e^{\ln(a).\ln(c)}$$

$$= (a*b)\times(a*c)$$

Et $(b\times c)*a = e^{\ln(b\times c).\ln(a)}$

inutile car la loi $*$ est commutative

$$= e^{(\ln(b)+\ln(c)).\ln(a)}$$

$$= e^{\ln(b).\ln(a)+\ln(c).\ln(a)} \qquad (* \text{ est distributive par rapport à } \times)$$

$$= e^{\ln(b).\ln(a)} \times e^{\ln(c).\ln(a)}$$

$$= (b*a)\times(c*a)$$

D'où pour tous a ; b et c des éléments de I ; $\begin{cases} a*(b\times c) = (a*b)\times(a*c) \\ (b\times c)*a = (b*a)\times(c*a) \end{cases}$

Donc la loi $*$ est distributive par rapport la loi $\times$ dans I.

b) • I est une partie non vide de $\mathbb{R}^*$

et pour tout $(a,b)\in I^2$; $\frac{1}{b}$ est le symétrique de b dans $(\mathbb{R}^*,\times)$; on a :

$a\times\frac{1}{b} > 0$; donc $\left(a\times\frac{1}{b}\right)\in I$.

D'où $(I,\times)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}^*,\times)$; de plus $\times$ est commutative dans $\mathbb{R}^*$; donc elle l'est dans I.

Par suite $(I,\times)$ est un groupe commutatif.

• $(I-\{1\},*)$ est un groupe . (d'après **Qestion3)a)**) et 1 est l'élément neutre de $\times$ dans $\mathbb{R}$.

• la loi $*$ est distributive par rapport la loi $\times$ dans I

• la loi $*$ est commutative dans I

Donc $(I,*,\times)$ est un anneau commutatif.

Et comme $(I,\times)$ n'admet pas de diviseurs de 0. $(I,*,\times)$ est un anneau intégre.

On conclut que $(I,*,\times)$ est un corps commutatif.

II- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1) On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Et $A^3 = A.A^2$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Donc $\boxed{A^3 = O}$ où O est la matrice nulle

2) Supposons que A est inversible et que A^{-1} son inverse ; on a donc : $A.A^{-1} = I_3$ où I_3 est l'élément neutre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$A.A^{-1} = I_3 \Leftrightarrow A^2.A.A^{-1} = A^2.I_3$

$\Leftrightarrow A^3.A^{-1} = A^2$

$\Leftrightarrow O.A^{-1} = A^2$

$\Leftrightarrow O = A^2$ ce qui est absurde ; donc A est non inversible.

Exercice 2 :

1) a) Déterminons les racines carrées du nombre complexe $3+4i$

Soit $r = x+iy$ racine carrée du nombre complexe $3+4i$; alors on a :

$z^2 = 3+4i \Leftrightarrow (x+iy)^2 = 3+4i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = 3+4i \\ |r^2| = |3+4i| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ xy = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Donc les deux racines carrées du complexe $3+4i$ sont $r_1 = 2+i$ et $r_2 = -2-i$

b) Soit l'équation $(E): 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$

Le discriminant de (E) est : $\Delta = (-10i)^2 + 4\times 4(7+i)$

$$= -100 + 112 + 16i$$
$$= 12 + 16i$$
$$= 4(3+4i)$$

Donc les racines de Δ sont $\delta_1 = 2(2+i)$ et $\delta_2 = 2(-2-i)$

D'où les solutions de (E) sont :

$$z_1 = \frac{10i - 2(2+i)}{8} = -\frac{1}{2} + i \text{ et } z_2 = \frac{10i + 2(2+i)}{8} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

Donc $S = \left\{ -\frac{1}{2} + i ; \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right\}$

2) On a : $A\left(a = -\frac{1}{2} + i\right)$ et $B\left(b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)$

a) alors $\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}{-\frac{1}{2} + i}$

$$= \frac{1+3i}{-1+2i}$$
$$= \frac{(-1-2i)(1+3i)}{5}$$
$$= \frac{-1-2i-3i+6}{5}$$
$$= \frac{5-5i}{5}$$
$$= 1 - i$$

Donc $\frac{b}{a}=1-i$

b) On a : $\frac{b-a}{0-a}=-\frac{b}{a}+1=i$

$$\text{donc}\begin{cases}\left|\frac{b-a}{0-a}\right|=1\\ \arg\left(\frac{b-a}{0-a}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AB=AO\\ \left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$$

D'où le triangle OAB est isocèle- rectangle en A.

3) Soit R la rotation de centre $C(c)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$; T la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ et D le point d'affixe d ; L le point d'affixe ℓ .

a) On a : $R(B)=D\Leftrightarrow d-c=(b-c)e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow d=(b-c)i+c$$
$$\Leftrightarrow d=ib+(1-i)c$$
$$\Leftrightarrow d=i\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+(1-i)c$$
$$\Leftrightarrow d=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+(1-i)c$$

Donc $d=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+(1-i)c$

b) On a : $T(D)=L\Leftrightarrow\overrightarrow{DL}=\overrightarrow{AO}$

$$\Leftrightarrow \ell-d=-a$$
$$\Leftrightarrow \ell=-a+\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+(1-i)c\right)$$
$$\Leftrightarrow \ell=-\left(-\frac{1}{2}+i\right)-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+(1-i)c$$
$$\Leftrightarrow \ell=\frac{1}{2}-i-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+(1-i)c$$
$$\Leftrightarrow \ell=-1-\frac{1}{2}i+(1-i)c$$

Donc $\ell=-1-\frac{1}{2}i+(1-i)c$

c) On a : $\frac{\ell-c}{a-c}=\frac{-1-\frac{1}{2}i+(1-i)c-c}{-\frac{1}{2}+i-c}$

$$= \frac{-1-\frac{1}{2}i-ic}{-\frac{1}{2}+i-c}$$

$$= \frac{-1-\left(\frac{1}{2}+c\right)i}{-\left(\frac{1}{2}+c\right)+i}$$

$$= \frac{\left(-\left(\frac{1}{2}+c\right)+i\right)i}{-\left(\frac{1}{2}+c\right)+i} = i$$

Donc $\frac{\ell-c}{a-c} = i$

D'où $\begin{cases} \left|\frac{\ell-c}{a-c}\right| = 1 \\ arg\left(\frac{\ell-c}{a-c}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CL = CA \\ \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CL}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Ainsi le triangle ACL est isocèle-rectangle en C.

Exercice 3 :

1) Déterminons les entiers relatifs m vérifiant : $m^2+1 \equiv 0[5]$

Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m^2+1 \equiv 0[5]$, donc $m^2 \equiv -1[5]$

Puisque $-1 \equiv 4[5]$ alors $m^2 \equiv 4[5]$ d'où $m^2-4 \equiv 0[5]$

Donc $(m-2)(m+2) \equiv 0[5]$

Ainsi $5 \mid (m-2)(m+2)$ et comme 5 est premier alors $5 \mid m-2$ ou $5 \mid m+2$

Donc $m \equiv 2[5]$ ou $m \equiv -2[5]$

Et comme $3 \equiv -2[5]$ on aura $m \equiv 2[5]$ ou $m \equiv 3[5]$

Réciproquement

- Si $m \equiv 2[5]$ alors $m^2 \equiv 4[5]$ càd $m^2 \equiv -1[5]$ donc $m^2+1 \equiv 0[5]$
- Si $m \equiv 3[5]$ alors $m^2 \equiv 9[5]$ cad $m^2 \equiv -1[5]$ donc $m^2+1 \equiv 0[5]$

En conclusions les entiers relatifs on vérifiant $m^2+1 \equiv 0[5]$ sont les entiers positifs tels que : $m \equiv 2[5]$ ou $m \equiv 3[5]$; ou autrement appartiennent à l'ensemble

$S = \{2+5k;3+5k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

2) p un nombre premier tel que $p = 3+4k$; où $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ où $m^2+1 \equiv 0[p]$

a) Vérifions que $\left(m^2\right)^{2k+1} \equiv -1[p]$

On a : $m^2+1\equiv 0[p]\Rightarrow m^2\equiv -1[p]$

$$\Rightarrow (m^2)^{2k+1}\equiv (-1)^{2k+1}[p]$$
$$\Rightarrow (m^2)^{2k+1}\equiv -1[p] \quad (car\ 2k+1\ est\ impair)$$

Donc $(m^2)^{2k+1}\equiv -1[p]$

b) Montrons que $m\wedge p=1$

D'après la question précédente on a : $(m^2)^{2k+1}\equiv -1[p]\Rightarrow m^{4k+2}\equiv -1[p]$

$$\Rightarrow m^{4k+2}=kp-1 \quad où\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow kp-m^{4k+2}=1 \quad où\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow kp+(-m^{4k+1})m=1$$

Donc $(u=k;v=-m^{4k+1})\in\mathbb{Z}^2$ tel que $up+vm=1$

D'où d'après le théorème de Bezout $m\wedge p=1$

c) Déduisons que $(m^2)^{2k+1}\equiv 1[p]$

on a $m\wedge p=1$ et p premier donc d'après le petit théorème de Fermat $m^{p-1}\equiv 1[p]$

et comme $p=3+4k$, on obtient $m^{3+4k-1}\equiv 1[p]\Rightarrow m^{4k+2}\equiv 1[p]$

$$\Rightarrow (m^2)^{2k+1}\equiv 1[p]$$

D'où $(m^2)^{2k+1}\equiv 1[p]$

d) Déduisons qu'il n'existe pas d'entier naturel n tel que $n^2+1\equiv 0[p]$

supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $n^2+1\equiv 0[p]$

donc $(n^2)^{2k+1}\equiv -1[p]$ d'après le résultat de la question présidente on a aussi

$(n^2)^{2k+1}\equiv 1[p]$; on déduit que $1\equiv -1[p]$ d'où $2\equiv 0[p]$

Donc $p\,|\,2$ ce qui est contradictoire avec le fait que $p=3+4k$ impair.

Donc il n'existe aucun entier naturel n tel que $n^2+1\equiv 0[p]$.

Exercice 4

Partie I

$f:x\mapsto 4xe^{-x^2}$; $x\in[0,+\infty[$

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4xe^{-x^2}\right)$

On pose $t=x^2$; donc $x=\sqrt{t}$ et $x\to+\infty\Rightarrow t\to+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\sqrt{t}\,e^{-t}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{t}}te^{-t}\right)=0\ (car\ \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{t}}=\lim_{x\to+\infty}te^{-t}=0\ )$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0}$

2) Etudions la monotonie de f sur $[0,+\infty[$

On a : les fonctions $x\mapsto -x^2$ et $x\mapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0,+\infty[$ donc $x\mapsto e^{-x^2}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$, de plus la fonction $x\mapsto 4x$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ d'où $f:x\mapsto 4xe^{-x^2}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et Pour tout $x\in[0,+\infty[$; on a : $f'(x)=\left(4xe^{-x^2}\right)'$

$$=4e^{-x^2}+4x\times(-2x)e^{-x^2}$$
$$=4e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

Donc $\boxed{\left(\forall x\in[0,+\infty[\right);f'(x)=4e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)}$

D'où le signe de $f'(x)$ est celui de $\left(1-2x^2\right)$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$\left(1-2x^2\right)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Par suite f est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$

Tableau de variations de f

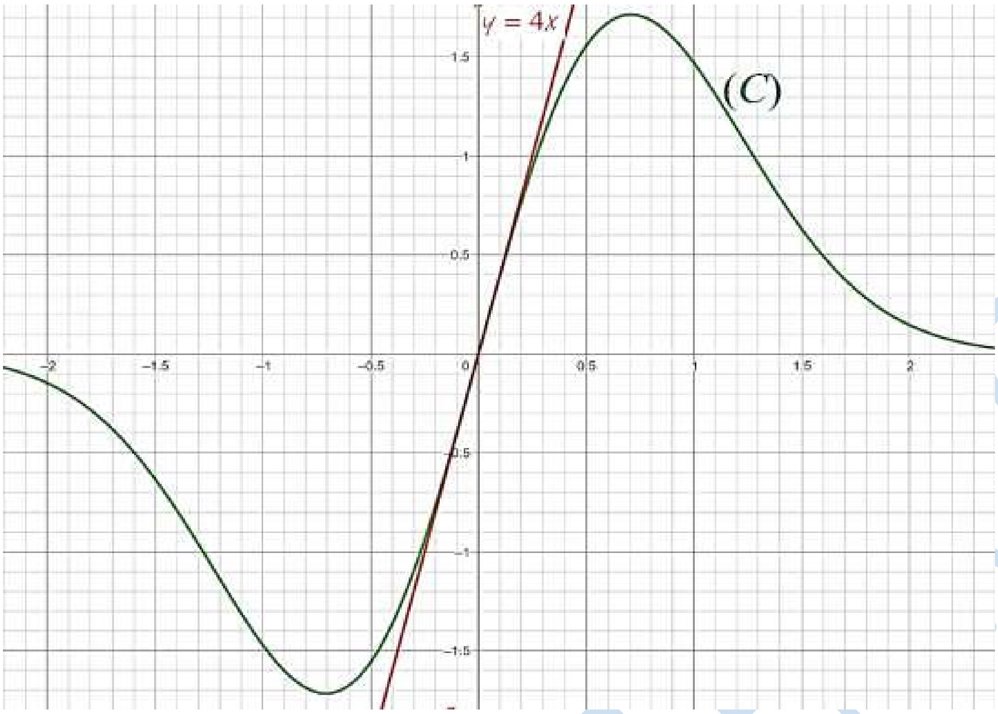
x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\sqrt{\frac{2}{e}}$	$\searrow$	0

3) • l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 est :

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

Donc $\boxed{y=4x}$

- *Représentation graphique de* (C)



4) Calculons l'intégrale $a = \int_0^1 f(x)\,dx$

On a : $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 4xe^{-x^2}\,dx$

$$= -2\int_0^1 (-2x)e^{-x^2}\,dx$$

$$= -2\int_0^1 \left(-x^2\right)' e^{-x^2}\,dx$$

$$= -2\left[e^{-x^2}\right]_0^1$$

$$= 2\left(1-e^{-1}\right)$$

Donc $\boxed{a = 2\left(1-e^{-1}\right)}$

Déduisons l'aire du domaine délimité par (C), les deux axes du repère et la droite d'équation $x = 1$

Soit A l'aire demandé, $A = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ et comme $f(x) \geq 0$ sur $[0,1]$ et $\left\|\vec{i}\right\|^2 = 4$

Donc $\boxed{A = 8\left(1-e^{-1}\right)\ cm^2}$

Partie II

Pour $n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq 2$; $f_n : x \mapsto 4x^n e^{-x^2}$; $x \in [0,+\infty[$

1) a) Montrons que $\forall x > 1$; $e^{-x^2} < e^{-x}$

Soit $\forall x > 1$; on a :

$x > 1 \Rightarrow x^2 > x$

$\Rightarrow -x^2 < -x$

$\Rightarrow e^{-x^2} < e^{-x}$ (car la fonction Exponentielle est strictement croissante)

Donc $\boxed{\forall x > 1; e^{-x^2} < e^{-x}}$

b) On a : $\forall x > 1$; $e^{-x^2} < e^{-x} \Rightarrow 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$

$\Rightarrow 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$

$\Rightarrow 0 < f_n(x) < 4x^n e^{-x}$

Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^n e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^n}{e^x} = 0$; alors $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0}$

2) Etudions la monotonie de f_n sur $[0,+\infty[$ et dressons son tableau de variations.

On a f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$; comme produit de deux fonction dérivables sur $[0,+\infty[$; et $(\forall x \in [0,+\infty[)$; on a : $f_n'(x) = \left(4x^n e^{-x^2}\right)'$

$$= 4n x^{n-1} e^{-x^2} - 8x^{n+1} e^{-x^2}$$
$$= 4x^{n-1} e^{-x^2}\left(n - 2x^2\right)$$

Donc et le signe de $f_n'(x)$ sur $[0,+\infty[$ est celui de $\left(n-2x^2\right)$

Tableau de signe de $f_n'(x)$

x	0		$\frac{\sqrt{2n}}{2}$		$+\infty$
$\left(n-2x^2\right)$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	

Donc f_n est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\sqrt{2n}}{2}\right]$ est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\sqrt{2n}}{2}, +\infty\right[$

D'où le tableau de variations de f_n sur $[0,+\infty[$

x	0	1	$\frac{\sqrt{2n}}{2}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{\dfrac{n^n}{2^{n-4}}}e^{-\frac{n}{2}}$	$\searrow$	0

$$\bullet f_n\left(\frac{\sqrt{2n}}{2}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2n}}{2}\right)^n e^{-\left(\frac{\sqrt{2n}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(2n)^n}}{2^{n-2}} e^{-\frac{n}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^n}{2^{n-4}}} e^{-\frac{n}{2}}$$

3) a) Montrons $\left(\exists! u_n \in]0,1[\right) / f_n\left(u_n\right) = 1$

Considérons la fonction $\varphi_n : x \mapsto f_n(x) - 1$ définie sur $[0,1]$

On a φ_n est dérivable donc continue sur $[0,1]$ et $\varphi_n'(x) = f_n'(x) > 0$

d'où φ_n est strictement croissante sur $[0,1]$, de plus : $\varphi_n(0) = f_n(0) - 1 = -1 < 0$ et $\varphi_n(1) = f_n(1) - 1 = 4e^{-1} - 1 > 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires on déduit $\left(\exists! u_n \in]0,1[\right) / \varphi_n\left(u_n\right) = 0$

Càd $\boxed{\left(\exists! u_n \in]0,1[\right) / f_n\left(u_n\right) = 1}$

b) Montrons que $\left(u_n\right)_{n\geq 2}$ est strictement croissante et déduisons qu'elle est convergente

On a : $f_{n+1}\left(u_{n+1}\right) = 1$ et $f_{n+1}\left(u_n\right) = 4(u_n)^{n+1} e^{-u_n^2} = \underbrace{4(u_n)^n e^{-u_n^2}}_{f_n\left(u_n\right)=1} \times u_n = u_n$

$u_n < 1$ donc $f_{n+1}\left(u_n\right) < f_{n+1}\left(u_{n+1}\right)$ et comme f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$ alors : $\forall n \geq 2$; $u_n < u_{n+1}$

Donc $\left(u_n\right)_{n\geq 2}$ est strictement croissante et comme elle est majorée par 1 ; alors elle est convergente.

5) Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

a) Montrons que $0 < \ell \leq 1$

$\left(u_n\right)_{n\geq 2}$ est strictement croissante alors, elle est minorée par son premier terme : $u_2 \leq u_n$; de plus on a : $0 < \quad \leq 1$

Donc $0 < u_2 \leq u_n \leq 1$; par passage à la limite on obtient : $0 < u_2 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 1$

D'où $\boxed{0 < \ell \leq 1}$

b) Montrons que $\forall n \geq 2$; $-\frac{\ln 4}{n} < \ln(u_n) \leq \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$

Soit $n \geq 2$ *; on a :* $f_n(u_n) = 1 \Leftrightarrow 4(u_n)^n e^{-u_n^2} = 1$

$$\Leftrightarrow (u_n)^n = \frac{1}{4} e^{u_n^2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left((u_n)^n\right) = \ln\left(\frac{1}{4} e^{u_n^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow n\ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln\left(e^{u_n^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(u_n) = \frac{-\ln(4) + u_n^2}{n}$$

D'autre part pour tout $n \geq 2$ *on a :* $0 < \quad \leq 1$

Donc $0 < u_n^2 \leq 1 \Rightarrow -\ln(4) < -\ln(4) + u_n^2 \leq 1 - \ln(4)$

$$\Rightarrow \frac{-\ln(4)}{n} < \frac{-\ln(4) + u_n^2}{n} \leq \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{-\ln(4)}{n} < \ln(u_n) \leq \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$$

Donc $\boxed{(\forall n \geq 2); -\frac{\ln 4}{n} < \ln(u_n) \leq \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}}$

c) On a $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{\ln 4}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}\right) = 0$ *; donc par propriété de limite et encadrement on a :* $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *où* $0 < \ell \leq 1$ *et la fonction* $\ln$ *est continue en* ℓ *; alors* $\ln\ell = 0 \Rightarrow \ell = 1$

D'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$

Exercice 5

$(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ *;* $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

1) Montrons que F *est impaire*

On a : ● $x \in \mathbb{R}^*$ *alors* $(-x \in \mathbb{R}^*)$

● $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$ *; on pose :* $u = -t \Rightarrow du = -dt$ *alors :*

$$F(-x) = -\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+u^2)} du = -F(x)$$

Donc F *est une fonction impaire.*

2) Posons $\varphi(x)=\int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$; $x\in]0,+\infty[$

a) Soit $x>0$; on a : $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

$$=\int_x^{1}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt+\int_1^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$$

$$=\int_x^{1}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt+\int_1^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$$

$$=\int_1^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt-\int_1^{x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$$

$$=\varphi(2x)-\varphi(x)$$

Donc $\boxed{\forall x>0\ \ ;\ \ F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x)}$

b) Soit $x>0$; la fonction $t\mapsto \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$ et $1\in]0,+\infty[$ alors elle admet des primitives sur $]0,+\infty[$; dont φ est la fonction primitive qui s'annule en 1 ; donc φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ alors :

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

Comme la fonction $x\mapsto 2x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ alors la fonction $x\mapsto \varphi(2x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$; par suite la fonction $F:x\mapsto \varphi(2x)-\varphi(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$; on a :

$$F'(x)=2\varphi'(2x)-\varphi'(x)$$

$$=\frac{2}{\ln(1+4x^2)}-\frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

$$=\frac{2\ln(1+x^2)-\ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\ln(1+x^2)}$$

Donc $\boxed{(\forall x\in]0,+\infty[);F'(x)=\frac{2\ln(1+x^2)-\ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\ln(1+x^2)}}$

c) D'après la question précédente on déduit que le signe de $F'(x)$ est celui de $2\ln(1+x^2)-\ln(1+4x^2)$

On a : $2\ln\left(1+x^2\right)-\ln\left(1+4x^2\right)=\ln\left(\dfrac{\left(1+x^2\right)^2}{1+4x^2}\right)$

Donc $2\ln\left(1+x^2\right)-\ln\left(1+4x^2\right)\geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{\left(1+x^2\right)^2}{1+4x^2}\right)\geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1+x^2\right)^2}{1+4x^2}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow 1+2x^2+x^4\geq 1+4x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4-2x^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2-2\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\geq\sqrt{2} \quad ou \quad x\leq -\sqrt{2}$$

Or $x>0$ *; donc* $F'(x)\geq 0$ *sur l'intervalle* $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ *et* $F'(x)\leq 0$ *sur l'intervalle* $\left]0,\sqrt{2}\right]$

Donc F *est strictement croissante sur* $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ *et strictement décroissante sur* $\left]0,\sqrt{2}\right]$

3) a) Pour tout $x>0$ *on a* φ *est continue sur* $[x,2x]$ *et dérivable sur* $]x,2x[$ *; donc d'après le théorème des accroissements finis :*

$$\left(\exists c\in\,]x,2x[\right)\ ;\ tel\ que\ \varphi(2x)-\varphi(x)=(2x-x)\varphi'(c)$$

$$=x\varphi'(c)$$

$$=\frac{x}{\ln\left(1+c^2\right)}$$

Donc $\boxed{(\forall x>0)\left(\exists c\in\,]x,2x[\right)/\ F(x)=\dfrac{x}{\ln\left(1+c^2\right)}}$

b) Soit $x>0$ *; on a :* $0<x<c<2x\Rightarrow 0<x^2<c^2<4x^2$

$$\Rightarrow 1+x^2<1+c^2<1+4x^2$$

$$\Rightarrow \ln\left(1+x^2\right)<\ln\left(1+c^2\right)<\ln\left(1+4x^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln\left(1+4x^2\right)}<\frac{1}{\ln\left(1+c^2\right)}<\frac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)}<\frac{x}{\ln\left(1+c^2\right)}<\frac{x}{\ln\left(1+x^2\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

Donc $\boxed{(\forall x>0);\ \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}}$

c) • On a : $\frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$

$$\text{Et } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+4\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x^2)+\ln\left(\frac{1}{x^2}+4\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{2\ln(x)}{x}+\frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}+4\right)}{x}} = +\infty \quad \left(\text{car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0\right)$$

$$\text{Et } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x^2)+\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{2\ln(x)}{x}+\frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{x}} = +\infty \quad \left(\text{car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0\right)$$

Donc par encadrement on déduit que : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0}$

• On a : $\frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$

$$\text{Et } \lim_{x\to0^+} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\frac{\ln(1+4x^2)-\ln(1+4\times0^2)}{x-0}}$$

$$\text{Et } \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+4x^2)-\ln(1+4\times0^2)}{x-0} = \left(\ln(1+4x^2)\right)'_{x=0}$$

$$= \left(\frac{8x}{1+4x^2}\right)_{x=0} = 0^+$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}=+\infty$ et comme $F(x)>\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}$ alors

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=+\infty}$

- On a : $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\dfrac{x}{\ln(1+x^2)}\Rightarrow\dfrac{1}{\ln(1+4x^2)}<\dfrac{F(x)}{x}<\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln(1+4x^2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}=0$

Donc par encadrement on déduit que : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0}$

d) Pour tout $x>0$ on a : $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$ et comme $\sqrt{e-1}>0$ alors :

- $F\left(\sqrt{e-1}\right)<\dfrac{\sqrt{e-1}}{\ln\left(1+\sqrt{e-1}^2\right)}\Rightarrow F\left(\sqrt{e-1}\right)<\sqrt{e-1}$

- $\dfrac{\frac{\sqrt{e-1}}{2}}{\ln\left(1+4\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)^2\right)}<F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right)\Rightarrow\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}<F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right)$

Donc $\boxed{F\left(\sqrt{e-1}\right)<\sqrt{e-1}}$ et $\boxed{F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}}$

- On remarque d'abord que si $x>\sqrt{2}$; alors $F(x)<x$

Puisque $x>\sqrt{2}\Rightarrow x^2>2$

$$\Rightarrow 1+x^2>3$$

$$\Rightarrow \ln(1+x^2)>\ln 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(1+x^2)}<\frac{1}{\ln 3}<1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ln(1+x^2)}<x$$

On considère la fonction $G: x\mapsto F(x)-x$ définie sur $\left]0;\sqrt{2}\right]$

G est continue et strictement décroissante sur $\left]0;\sqrt{2}\right]$; puisque

$G'(x)=F'(x)-1<0$ (on rappelle que $F'(x)\le 0$ sur l'intervalle $\left]0,\sqrt{2}\right]$)

D'autre part on a : $G\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)=F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)-\frac{\sqrt{e-1}}{2}>0$ et

$G\left(\sqrt{e-1}\right)=F\left(\sqrt{e-1}\right)-\sqrt{e-1}<0$

Donc d'après le TVI ; l'équation $G(x)=0$ càd $F(x)=x$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]\frac{\sqrt{e-1}}{2},\sqrt{e-1}\right[\subset\left]0,\sqrt{2}\right[$