



guessmaths

Correction examen nationale 2009 Session Normale

2ème Bac SM A et B

Exercice 1 :

1) a) Soient $M(x, y)$ et $M(a, b)$ deux matrices de F .

$$\begin{aligned} \text{On a : } M(x, y) \times M(a, b) &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa & xb + \frac{y}{a} \\ 0 & \frac{1}{xa} \end{pmatrix} \\ &= M\left(xa, xb + \frac{y}{a}\right) \end{aligned}$$

Donc $(M(x, y) \times M(a, b)) \in F$

D'où F est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

b) F est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$; donc $\times$ est une loi de composition interne dans F . Et $(M_2^*(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe non commutatif.

et $M(x, y) \in F$

Soit $M(x, y)$ matrice de F .

$$\Delta M(x, y) = \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 1$$

donc tout élément de F est symétrisable et son symétrique est :

$$M^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in F$$

• On remarque que $M(a, b) \times M(b, a) = M(ab, a^2 + 1)$

Et $M(b, a) \times M(a, b) = M(ba, b^2 + 1)$; donc pour $a \neq b$

$$M(a, b) \times M(b, a) \neq M(b, a) \times M(a, b)$$

D'où $\times$ n'est pas commutative dans F .

Par suite $(F, \times)$ est un groupe non commutatif.

2) On a $M(1, 0) \in G$; donc G est une partie non vide de F .

Soient $M(a, 0)$ et $M(b, 0)$ deux matrices de G et $(M(a, 0))^{-1}$ le symétrique de $M(a, 0)$

$$\text{on a : } M(b, 0) \times (M(a, 0))^{-1} = M(b, 0) \times M\left(\frac{1}{a}, 0\right)$$

$$M\left(\frac{b}{a}, 0\right) \in G \quad (\text{car } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$$

Donc $(G, \times)$ est un sous-groupe du groupe .

$$3) a) \bullet (1,1) \perp (2,3) = \left(2, 3 + \frac{1}{2}\right) = \left(2, \frac{7}{2}\right)$$

$$\bullet (2,3) \perp (1,1) = \left(2, 2 + \frac{3}{1}\right) = (2,5)$$

b) Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de F

$$\begin{aligned} \varphi(M(a,b) \times M(c,d)) &= \varphi\left(M\left(ac, bc + \frac{d}{a}\right)\right) \\ &= \left(ac, bc + \frac{d}{a}\right) \\ &= (c,d) \perp (a,b) \\ &= \varphi(M(c,d)) \perp \varphi(M(a,b)) \end{aligned}$$

Donc φ est un homomorphisme de $(F, \times)$ vers $(G, \perp)$

Soit $(a,b) \in E$; résolvons l'équation $\varphi(M(x,y)) = (a,b)$

$$\text{On a : } \varphi(M(x,y)) = (a,b) \Leftrightarrow (x,y) = (a,b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

Donc l'équation $\varphi(M(x,y)) = (a,b)$ admet une solution unique $M(a,b)$

D'où φ est une bijection de $(F, \times)$ vers $(G, \perp)$

Par suite φ est un isomorphisme de $(F, \times)$ vers $(G, \perp)$

c) Sachant que l'isomorphisme conserve la structure du groupe et que

$\varphi((F, \times)) = (G, \perp)$; on déduit que $(G, \perp)$ est un groupe non commutatif ; d'élément

$\varphi(M(1,0)) = (1,0)$; et tout élément (x,y) de E admet un symétrique

$$\varphi\left(M\left(\frac{1}{x}, -y\right)\right) = \left(\frac{1}{x}, -y\right)$$

Exercice 2 :

$$(E_m) : z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0$$

I- 1) a) Le discriminant de (E_m) est : $\Delta = ((1-i)(m+1))^2 + 4i(m^2+1)$

$$= (1-i)^2(m+1)^2 + 4im^2 + 4i$$

$$= -2i(m^2 + 2m + 1) + 4im^2 + 4i$$

$$= -2im^2 - 4im - 2i + 4im^2 + 4i$$

$$= 2im^2 - 4im + 2i$$

$$= 2i(m^2 - 2m + 1)$$

$$= ((1+i)(m-1))^2$$

$$\text{Donc } \Delta = ((1+i)(m-1))^2$$

UES MATHS.CO

b) Les solutions de sont :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(1-i)(m+1) - (1+i)(m-1)}{2} \\ &= \frac{m+1-im-i-m+1-im+i}{2} \\ &= \frac{2-2im}{2} \\ &= 1-im \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{(1-i)(m+1) + (1+i)(m-1)}{2} \\ &= \frac{m+1-im-i+m-1+im-i}{2} \\ &= \frac{2m-2i}{2} \\ &= m-i \end{aligned}$$

Donc $S = \{1-im, m-i\}$

c) $m = re^{i\theta}$; on a : $z_1 = 1-im$; $z_2 = m-i$ et $z_1 z_2 = 1$

$$\text{Donc } (1-im)(m-i) = 1 \Rightarrow m-i-im^2-m=1$$

$$\Rightarrow im^2 = -1-i$$

$$\Rightarrow m^2 = -1+i$$

$$\Rightarrow r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ e^{2i\theta} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} + k\pi \quad k=0 \text{ ou } k=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} \text{ ou } \theta = \frac{11\pi}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{3\pi}{8}} \\ m_2 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{11\pi}{8}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right) \\ m_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8} \right) \end{cases}$$

$$\text{Et on a : } \bullet \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos \left(2 \times \frac{3\pi}{8} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 \left(\frac{3\pi}{8} \right) - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad (\text{car } 0 < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{aligned} \bullet \cos\left(\frac{11\pi}{8}\right) &= \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) &= \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)} \quad (\text{car } 0 < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}) \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin\left(\frac{11\pi}{8}\right) &= \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } m_1 = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right) \text{ et } m_2 = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right)$$

$$2) m = e^{i\theta} \text{ où } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi ; \text{ on a : } z_1 = 1 - im ; \quad z_2 = m - i$$

$$\bullet \text{ Posons } z_1 = re^{i\varphi}$$

$$z_1 = 1 - im$$

$$= 1 - i(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= (1 + \sin\theta) - i\cos\theta$$

$$= re^{i\varphi}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} r \cos \varphi = (1 + \sin \theta) \\ r \sin \varphi = -\cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{et } (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 &= r^2 \Rightarrow r^2 = (1 + \sin \theta)^2 + (-\cos \theta)^2 \\ &\Rightarrow r^2 = 1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\ &\Rightarrow r^2 = 2(1 + \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r^2 = 2 \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \theta \right)$$

$$\Rightarrow r^2 = 2 \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$\Rightarrow r^2 = 4 \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$\Rightarrow r^2 = 4 \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(-\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right) \right)$$

$$\Rightarrow r^2 = 4 \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$\Rightarrow r^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\Rightarrow r = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\text{Et } r \sin \varphi = -\cos \theta \Rightarrow \frac{-\cos \theta}{\sin \varphi} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{-\cos \theta}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sin \left(-\frac{\pi}{2} + \theta \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{-\sin \left(-\frac{\pi}{2} + \theta + \pi \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{-\sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{-\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi \equiv \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)[\pi]$$

Donc $z_1 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}$

• Posons $z_2 = re^{i\varphi}$

$$z_2 = m - i$$

$$= (\cos \theta + i \sin \theta) - i$$

$$= \cos \theta - i(\sin \theta - 1)$$

$$= re^{i\varphi}$$

Donc : $\begin{cases} r \cos \varphi = \cos \theta \\ r \sin \varphi = \sin \theta - 1 \end{cases}$

D'où $r^2 = \cos^2 \theta + (\sin \theta - 1)^2 \Rightarrow r^2 = 2(1 - \sin \theta)$

$$\Rightarrow r^2 = 2\left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin(-\theta)\right) \text{ de la même façon}$$

$$\Rightarrow r^2 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow r = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

Et $r \cos \varphi = \cos \theta \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\cos \theta}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sin\left(-\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} [\pi]$$

Donc $z_2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$

II- 1) $M ; M_1$ et M_2 sont alignés $\Leftrightarrow M \in (M_1 M_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1 - m}{z_2 - m} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - im - m}{m - i - m} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - im - m}{i} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (i + m - im) \in \mathbb{R}$$

Posons $m = x + iy$; alors $(i + x + iy - i(x + iy)) \in \mathbb{R} \Rightarrow ((x + y) + (1 + y - x)i) \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 1 + y - x = 0$$

$$\Rightarrow y = x - 1$$

Donc l'ensemble des points M tels que $M ; M_1$ et M_2 sont alignés est la droite d'équation $y = x - 1$

2) a) Soit $M'(z')$ l'image du point $M(z)$ par la transformation R ; on a : $z' = 1 - iz$

On cherche à écrire cette égalité sous la forme : $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$

Donc $1 - iz = (z - \omega)e^{i\theta} + \omega$

$$= e^{i\theta} z + \omega(1 - e^{i\theta})$$

$$\text{D'où } \begin{cases} e^{i\theta} = -i \\ \omega(1 - e^{i\theta}) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{2} \\ \omega = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases}$$

Par suite la transformation R est une rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

b) on pose $m = x + iy$; $\operatorname{Re}(m) = x$ et $\operatorname{Im}(m) = y$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right)} = -\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\bar{m} + i - 1 - i\bar{m}}{i} = \frac{m - i - 1 + im}{i} \\ &\Leftrightarrow (x - iy) + i - 1 - i(x - iy) = (x + iy) - i - 1 + i(x + iy) \\ &\Leftrightarrow -2ix + 2i - 2iy = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y = 1 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(m) + \operatorname{Im}(m) = 1 \end{aligned}$$

c) Les points M ; M_1 ; M_2 et Ω sont cocycliques si et seulement si

$$\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega}\right) [\pi]$$

$$\begin{aligned} \text{Et } \frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega} &= \frac{m - i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{1 - im - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} \\ &= \frac{2m - 2i - 1 + i}{2 - 2im - 1 + 1i} \\ &= \frac{(2m - 1) - i}{1 - (2m - 1)i} \\ &= \frac{-i(1 - (2m - 1)i)}{1 - (2m - 1)i} = -i \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega} \in i\mathbb{R} ; \text{ et comme } \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega}\right) [\pi]$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in i\mathbb{R} &\Rightarrow \frac{m - i - 1 + im}{m - i - m} \in i\mathbb{R} \\ &\Rightarrow \frac{m(i+1) - (i+1)}{-i} \in i\mathbb{R} \\ &\Rightarrow i(m-1)(i+1) \in i\mathbb{R} \\ &\Rightarrow (x-1+iy)(i-1) \in i\mathbb{R} \\ &\Rightarrow (ix - i - y - x + 1 - iy) \in i\mathbb{R} \\ &\Rightarrow 1 - y - x - i(y - x + 1) \in i\mathbb{R} \\ &\Rightarrow 1 - y - x = 0 \\ &\Rightarrow y = -x + 1 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M tels que $M ; M_1 ; M_2$ et Ω sont cocycliques est la droite d'équation $y = -x + 1$.

Exercice 3 :

$$1) \ a) \ a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$$

$$= (2^n - 1) + 3^n (1 + 2^n)$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \begin{cases} 3 \equiv 1[2] \\ 2 \equiv 0[2] \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3^n \equiv 1[2] \\ 2^n \equiv 0[2] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 3^n \equiv 1[2] \\ 2^n - 1 \equiv 1[2] \text{ et } 2^n + 1 \equiv 1[2] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 3^n (1 + 2^n) \equiv 1[2] \\ 2^n - 1 \equiv 1[2] \end{cases} \\ &\Rightarrow (2^n - 1) + 3^n (1 + 2^n) \equiv 2[2] \\ &\Rightarrow (2^n - 1) + 3^n (1 + 2^n) \equiv 0[2] \\ &\Rightarrow a_n \equiv 0[2] \end{aligned}$$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n$ est un entier pair.

$$b) \ a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$$

$$= (3^n - 1) + 2^n (1 + 3^n)$$

$$\text{On a : } 3 \equiv 0[3] \Rightarrow \begin{cases} 3^n + 1 \equiv 1[3] \\ 3^n - 1 \equiv -1[3] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^n (3^n + 1) \equiv 2^n [3] \\ 3^n - 1 \equiv -1 [3] \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^n (3^n + 1) + (3^n - 1) \equiv 2^n - 1 [3]$$

$$\Rightarrow a_n \equiv 2^n - 1 [3]$$

$$\text{Et } 2 \equiv -1 [3] \Rightarrow 2^n \equiv (-1)^n [3]$$

$$\Rightarrow 2^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 [3]$$

$$\text{D'où } a_n \equiv (-1)^n - 1 [3]$$

Donc • pour n pair $a_n \equiv 0 [3]$
 • pour n impair $a_n \equiv -2 [3]$

2) a) On a : • $p \wedge 2 = 1$ et p premier ; donc d'après le théorème de FERMAT $2^{p-1} \equiv 1 [p]$
 • $p \wedge 3 = 1$ et p premier ; donc d'après le théorème de FERMAT $3^{p-1} \equiv 1 [p]$

$$\text{Donc } 2^{p-1} \times 3^{p-1} \equiv 1 [p]$$

$$\text{D'où } 6^{p-1} \equiv 1 [p]$$

b) On a :

$$\left. \begin{aligned} 2^{p-1} &\equiv 1 [p] \Rightarrow 3 \times 2^{p-1} \equiv 3 [p] \\ 3^{p-1} &\equiv 1 [p] \Rightarrow 2 \times 3^{p-1} \equiv 2 [p] \\ 6^{p-1} &\equiv 1 [p] \Rightarrow 6 \times 6^{p-2} \equiv 1 [p] \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 \times 2^{p-1} + 2 \times 3^{p-1} + 6 \times 6^{p-2} \equiv 6 [p]$$

$$\Rightarrow 3 \times 2^{p-1} + 2 \times 3^{p-1} + 6 \times 6^{p-2} - 6 \equiv 0 [p]$$

$$\Rightarrow 6 \times (2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1) \equiv 0 [p]$$

$$\Rightarrow 6 \times a_{p-2} \equiv 0 [p]$$

$$\Rightarrow p \mid 6 \times a_{p-2}$$

Et comme $6 = 2^1 \times 3^1$ et $p \wedge 2 = 1$; $p \wedge 3 = 1$ alors $p \wedge 6 = 1$

Donc d'après le théorème de GAUSS ; on a : $p \mid a_{p-2}$

c) Soit q un nombre premier ; alors on a trois cas possibles :

1^{er} Cas : $q = 2$

D'après la question 1)a) on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2 \mid a_n$

Donc $(\exists n \in \mathbb{N}^*) / a_n \wedge q = q$

2^{ème} Cas : $q = 3$

D'après la question 1)b) on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 3 \mid a_n$

Donc $(\exists n \in \mathbb{N}^*) / a_n \wedge q = q$

3^{ème} Cas : $q > 3$

D'après la question 2)b) on a : $(\forall q > 3) ; q \mid a_{q-2}$

Donc $(\exists n \in \mathbb{N}^*) / a_n \wedge q = q$

On conclut que : $(\forall q \in \mathbb{P}) (\exists n \in \mathbb{N}^*) / a_n \wedge q = q$

Exercice 4 :

1ère Partie

1) a) On pose : $x = t^n$; donc $\ln x = n \ln t$

D'où $t = e^{\left(\frac{\ln x}{n}\right)}$ et $x \mapsto 0^+ \Rightarrow t \mapsto 0^+$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x)^n \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} t^n (1 - n \ln t)^n \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (t - n t \ln t)^n = 0 \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} (t^n \ln t) = 0) \end{aligned}$$

Et $f_n(0) = 0$; donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = f_n(0)$

Par suite f_n est continue à droite en 0.

$$\begin{aligned} \text{b) On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - \ln x)^n}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x)^n = +\infty \end{aligned}$$

Donc f_n n'est pas dérivable à droite en 0.

$$\text{c) } \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x)^2 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x)^2 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ (comme composée de fonctions de fonctions dérivable sur $]0, +\infty[$; et pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \left(x(1 - \ln x)^n \right)' \\ &= (1 - \ln x)^n - nx \times \frac{1}{x} (1 - \ln x)^{n-1} \\ &= (1 - \ln x)^{n-1} ((1 - \ln x) - n) \\ &= (1 - n - \ln x) (1 - \ln x)^{n-1} \end{aligned}$$

Donc : $\bullet f'_1(x) = -\ln x$

Tableau de variations de f_1

x	0	1	e	$+\infty$
$f_1'(x)$		+	0	-
$f_1(x)$	0	↗ 1	↘ 0	↘ $-\infty$

$$\begin{aligned}
 \bullet f_2'(x) &= (1 - 2 - \ln x)(1 - \ln x) \\
 &= -(1 + \ln x)(1 - \ln x) \\
 &= -(1 + \ln x)(1 - \ln x)
 \end{aligned}$$

Tableau de signe de $f_2'(x)$

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$	
$-(1+\ln x)$	+	0	-		
$(1-\ln x)$		+	0	-	
$f_2'(x)$	+	0	-	0	+

Tableau de variations de f_1

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$		
$f_2'(x)$		+	0	-	0	+
$f_2(x)$	0	$\frac{4}{e}$	0	$+\infty$		

$$\begin{aligned}
 3) a) \text{ On a : } f_1(x) - f_2(x) &= x(1 - \ln x) - x(1 - \ln x)^2 \\
 &= x(1 - \ln x)(1 - (1 - \ln x)) \\
 &= x \ln x (1 - \ln x)
 \end{aligned}$$

Tableau de signe de $f_1(x) - f_2(x)$

x	0	1	e	$+\infty$	
$\ln x$	—	0	+		
$(1-\ln x)$		+	0	—	
$f_1(x)-f_2(x)$	—	0	+	0	—

Donc (C_1) est au-dessus de (C_2) sur l'intervalle $[1, e]$

Et (C_1) est au-dessous de (C_2) sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[e, +\infty[$

b) Construction des courbes (C_1) et (C_2)



2^{ème} Partie

1) a) On pose : $t = e^x$; la fonction $t \mapsto \frac{f_1(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$; donc elle admet

une primitive φ telle que : $F(x) = \varphi(1) - \varphi(e^x)$ et $\varphi'(x) = \frac{f_1(x)}{1+x^2}$

Donc F est dérivable sur $]-\infty, 0[$; et pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\varphi(1) - \varphi(e^x))' \\ &= -e^x \varphi'(e^x) \\ &= -e^x \frac{f_1(e^x)}{1+e^{2x}} \\ &= \frac{-e^x \times e^x (1 - \ln(e^x))}{1+e^{2x}} \\ &= \frac{-e^{2x} (1-x)}{1+e^{2x}} \\ &= \frac{e^{2x} (x-1)}{1+e^{2x}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in]-\infty, 0[) ; F'(x) = \frac{e^{2x} (x-1)}{1+e^{2x}}$$

b) $F'(x)$ est du même signe que $(x-1)$; donc $(\forall x \in]-\infty, 0[) ; F'(x) < 0$

D'où F est décroissante sur $]-\infty, 0[$

2) a) Soit $t \in [e^x, 1]$; tel que $x < 0$

$$\text{Donc } e^x < t < 1 \Leftrightarrow 1+e^{2x} < 1+t^2 < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(t)}{2} < \frac{f_1(t)}{1+t^2} < \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}} \quad (\text{car } x < 0 \Rightarrow (t \in]0,1]) \text{ donc } f_1(t) > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt < \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} dt < \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt < F(x) < \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$$

$$\text{Donc } (\forall x < 0) ; \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt < F(x) < \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{b) Pour tout } x \in]0, +\infty[\text{ on a : } \left(x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) \right)' &= 2x \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) - x^2 \times \frac{1}{2x} \\ &= \frac{3x}{2} - x \ln x - \frac{x}{2} \\ &= x(1 - \ln x) \\ &= f_1(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction $x \mapsto x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$ est une fonction primitive de f_1 sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{c) On a : } \int_{e^x}^1 f_1(t) dt &= \left[x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) \right]_{e^x}^1 \\ &= \frac{3}{4} - e^{2x} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3e^{2x}}{4} + \frac{xe^{2x}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = 0 ; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$$

$$3) \text{ Soit } \ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$$

$$\text{D'après la question 2)a) on a : } (\forall x < 0) ; \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt < F(x) < \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \right) < \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) < \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \right)$$

$$\text{D'où } \frac{3}{8} < \ell < \frac{3}{4}$$

2ème Partie

$$1) \text{ a) Soit } 1 \leq x \leq e \text{ et } n \geq 1$$

$$\text{Donc } 0 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow 1 - \ln x \geq 0$$

$$\Rightarrow x(1 - \ln x)^n \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_1^e f_n(x) dx \geq 0$$

$$\Rightarrow u_n \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 b) \text{ On a : } f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x(1 - \ln x)^{n+1} - x(1 - \ln x)^n \\
 &= x(1 - \ln x)^n (1 - \ln x - 1) \\
 &= x(-\ln x)(1 - \ln x)^n
 \end{aligned}$$

Pour $1 \leq x \leq e$; on a : $-\ln x \leq 0$ et $1 - \ln x \geq 0$; donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in [1, e]) ; f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

c) D'après la question précédente $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in [1, e]) ; f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

$$\text{Donc } \int_1^e f_{n+1}(x) dx \leq \int_1^e f_n(x) dx$$

$$\text{D'où } u_{n+1} \leq u_n$$

d) On a : $u_{n+1} \leq u_n$; donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante ; et comme elle est minorée par 0 alors elle est convergente.

2) a) En utilisant une intégration par partie calculons $u_{n+1} = \int_1^e f_{n+1}(x) dx$

$$\text{On a : } \int_1^e f_{n+1}(x) dx = \int_1^e x(1 - \ln x)^{n+1} dx$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} u = (1 - \ln x)^{n+1} \Rightarrow u' = -\frac{1}{x}(n+1)(1 - \ln x)^n \\ v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } \int_1^e f_{n+1}(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} (1 - \ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times \left(-\frac{1}{x}(n+1)(1 - \ln x)^n \right) dx \\
 &= -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} \int_1^e x(1 - \ln x)^n dx \\
 &= -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} \int_1^e f_n(x) dx
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \left(\frac{n+1}{2} \right) u_n$$

$$b) \text{ Soit } \mathcal{S} \text{ l'aire demandée ; on a : } \mathcal{S} = \int_1^e |f_2(x) - f_1(x)| dx$$

et d'après la question 3)a) (C_1) est au-dessus de (C_2) sur l'intervalle $[1, e]$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } \mathcal{S} &= \int_1^e f_1(x) - f_2(x) dx \\
 &= \int_1^e f_1(x) dx - \int_1^e f_2(x) dx \\
 &= u_1 - u_2
 \end{aligned}$$

$$\text{Et } u_2 = -\frac{1}{2} + u_1 \Rightarrow u_1 - u_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } \mathcal{S} = \frac{1}{2} (2\text{cm})^2 = 2\text{cm}^2$$

3) a) On a d'après ce qui précède : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n$ et $u_{n+1} \geq 0$

On prend $n \geq 2$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2} + \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n \geq 0$$

$$\text{D'où } \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } u_n \geq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{D'autre part on a : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n \leq u_n$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n - u_n \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n-1}{2}\right)u_n \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\text{Donc pour tout entier naturel } n \geq 2 ; \text{ on a : } \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

b) D'après l'encadrement de la question précédente ; on déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

$$(\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0)$$

D'autre part : pour tout entier naturel $n \geq 2$; on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1} &\Rightarrow \frac{n}{n+1} \leq nu_n \leq \frac{n}{n-1} \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leq nu_n \leq \frac{1}{n-\frac{1}{n}} \quad (\text{et comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0) \end{aligned}$$

$$\text{Donc par encadrement on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$$

4) a) Soit $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{On a : } d_n = |v_n - u_n| &= \left| -\frac{1}{2} + \frac{n}{2}v_{n-1} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}u_{n-1} \right| \\ &= \frac{n}{2} |v_{n-1} - u_{n-1}| \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } |v_n - u_n| = \frac{n}{2} |v_{n-1} - u_{n-1}|$$

$$\text{On écrit donc pour les valeurs de } n \geq 1 : |v_n - u_n| = \frac{n}{2} |v_{n-1} - u_{n-1}|$$

$$|v_{n-1} - u_{n-1}| = \frac{n-1}{2} |v_{n-2} - u_{n-2}|$$

$$\begin{aligned} |v_{n-2} - u_{n-2}| &= \frac{n-2}{2} |v_{n-3} - u_{n-3}| \\ &\vdots \\ &\vdots \\ |v_2 - u_2| &= \frac{2}{2} |v_1 - u_1| \end{aligned}$$

En multipliant les membres des inégalités on obtient : $|v_n - u_n| = \frac{n!}{2^{n-1}} |v_1 - u_1|$

D'où $(\forall n \geq 1) ; d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$

b) Montrons par récurrence que : $(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$

• Pour $n = 2$

On a : $\frac{2!}{2^{2-1}} = 1$; donc $\frac{2!}{2^{2-1}} \geq 3^{2-2} = 1$

• Soit $n \geq 2$

Supposons que $\frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$ et montrons que $\frac{(n+1)!}{2} \geq 3^{n-1}$

$$\text{On a : } \begin{cases} n \geq 2 \\ \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+1 \geq 2 \\ \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \frac{(n+1)!}{2} \geq 3^{n-1}$$

Conclusion : $(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$

c) On a : $(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \Leftrightarrow n! \geq 2 \times 3^{n-2}$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2^{n-1}} \geq \frac{2 \times 3^{n-2}}{2^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2^{n-1}} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2^{n-1}} d_1 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} d_1$$

$$\Leftrightarrow d_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} d_1$$

Et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = +\infty$ (car $\frac{3}{2} > 1$)

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$

Par suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est divergente.

d) Supposons que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lambda$

On a : $d_n = |v_n - u_n|$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = |\lambda|$

Ce qui est absurde car $(d_n)_{n \geq 1}$ est divergente.

On conclut que $(v_n)_{n \geq 1}$ est divergente.