Exercice 3« Fonction Exponentielle »

Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie sur R par : $f(x)=(x+1)e^{-x}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- a. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ et interpréter géométriquement le résultat.

b. Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$ puis déduire la nature de la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de -∞.

2) a. Montrer que $f'(x)=-xe^{-x}$ pour tout x de R;

b. Dresser le tableau de variations de f

3) a. Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion d'abscisse1 .

b. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

c. Tracer la courbe (C)

Correction Exercice 3

$f(x)=(x+1)e^{-x}$

1) a. Montrons que: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Soit $x\in IR$, on a :

$$f(x)=(x+1)e^{-x}$$
$$=\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}=0$ (car $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$)

Donc: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0}$

Interprétation géométrique:

On a $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation y=0 est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de +∞.

b. Montrons que : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

Soit $x\in IR$, on a :

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x}=-\infty$ (car $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$)

Donc: $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}+\frac{1}{xe^{x}}$$
$$=+\infty$$

D'où: $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

<u>Interprétation géométrique</u>:

la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

1) a. Montrons que: $(\forall x \in IR)\ \ f'(x) = -xe^{-x}$

Les fonctions : $u : x \mapsto x+1$ *et* $v : x \mapsto e^{-x}$ *sont dérivables sur IR, donc la fonction f est dérivable sur IR.*

et on a : $(\forall x \in IR)\ \ f'(x) = \left(u(x)\times v(x)\right)'$

$$= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x)$$
$$= 1e^{-x} - (x+1)e^{-x}$$
$$= (1-x-1)e^{-x}$$
$$= -xe^{-x}$$

b. Tableau de variations de f:

Soit $x \in IR$, *on a :* $f'(x) = -xe^{-x}$ *et* $e^{-x} > 0$ *donc le signe de* $f'(x)$ *est celui de* $-x$, *Donc:*

le tableau de variations de f est le suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) a. Montrons que la courbe (C) admet un point d'inflexion

La fonction f est deux fois dérivable sur IR

Soit $x \in IR$, *on a :* $f'(x) = -xe^{-x}$ *donc:* $f''(x) = -\left(e^{-x} - xe^{-x}\right)$

$$= (x-1)e^{-x}$$

alors le signe de $f''(x)$ *est celui de* $(x-1)$ *sur R*

Donc le tableau de signe de $f''(x)$ *est :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

On a $f''(x)$ *s'annule en changeant de signe en 1 et* $f(1) = \frac{2}{e}$, *donc le point* $A\left(1;\frac{2}{e}\right)$ *est un point d'inflexion de la courbe (C).*

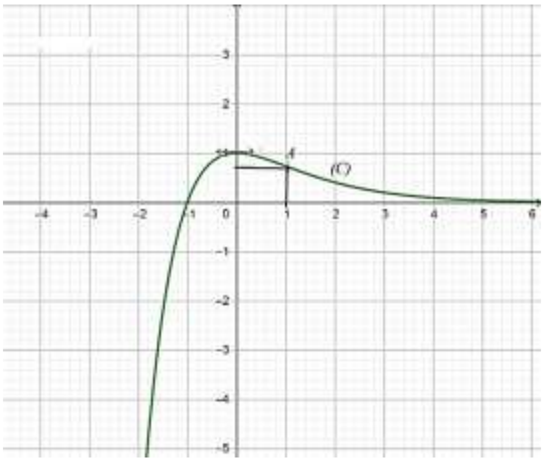
b. Déterminons une équation de la tangente (T)

On a : $f(1) = \frac{2}{e}$ *et* $f'(1) = \frac{1}{e}$, *Une équation de (T) est :* $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$= -\frac{1}{e}(x-1) + \frac{2}{e}$$
$$= -\frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$$

D'où: $(T) : y = -\frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$

c. Construction de (C):


(C)
A