Série n° 2 d'exercice sur « le calcul d'intégral » **2éme Bac S.M**

EXERCICE 1:

Soit $I=\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ et $J=\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$

1. Démontrer que $I=-J$ puis $J=I-1-e^{\pi}$.

2. En déduire les valeurs de I et J .

3. Calculer $K=\int_0^{\pi} e^x \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

EXERCICE 2:

1. a) Déterminer les réels a et b tels que $\forall x \in IR\setminus\{3\}$ on a : $\frac{x-2}{(x-3)^2}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{(x-3)^2}$

b) Calculer $I=\int_1^2 \frac{x-2}{(x-3)^2}dx$

2. Calculer les intégrales suivantes $J=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}-2e^x}{(e^x-3)^2}dx$; $K=\int_1^{e^2}\frac{\ln x-2}{x(\ln x-3)^2}dx$

EXERCICE 3:

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n=\int_0^{\pi} e^x \cos(nx)dx$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi)=(-1)^n$ $\sin(n\pi)=0$.

2. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $I_n=\frac{(-1)^n e^{\pi}+1}{1+n^2}$

3. Montrer que, pour tout entier naturel $|I_n|\le\frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$; En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

EXERCICE 4:

On pose, pour tout entier naturel n : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^{2n+1}(x)}$ et $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^{2n+1}(x)}dx$

1. a) Justifier l'existence de I_n .

b) Montrer que pour tout $n\in N^*$: $I_n-I_{n-1}=J_n$.

En déduire le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in IN^*}$.

2. Déterminer a et b pour que : $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{1}{cosx}=\frac{acosx}{1+\sin x}+\frac{bcosx}{1-\sin x}$

En déduire le calcul de I_0 .

3. a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n\in N^*$; $I_n=\frac{2^n}{\sqrt{2}}(2n-1)J_n$.

(On pourra remarquer que $\frac{1}{\cos^{2n+1}x}=\frac{1}{\cos^2 x}\times\frac{1}{\cos^{2n-1}x}$)

b) Déduire que $\forall n\in N^*$ $2I_n=(2n-1)I_{n-1}+\frac{2^n}{\sqrt{2}}$;

c) En déduire que $\forall n\in N^*, I_n\ge\frac{2^{n-1}}{\sqrt{2}n}$; puis calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

EXERCICE 5:

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ *par :* $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$

On désigne par (C_f) *sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. a) *Justifier la dérivabilité de f sur* $]0,+\infty[$ *et calculer* $f'(x)$.

   b) *En déduire le sens de variations de f sur* $]0,+\infty[$.

2. a) *Pour* $x>0$, *calculer* $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$

   b) *Montrer que pour tout* $x>1$, *on a :* $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln x}\right)\leq f(x)\leq 1-\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln x}$

   c) *Prouver que f admet une limite réelle* ℓ *en* $+\infty$ *Encadrer cette limite* ℓ.

3. a) *Soit g la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

   b) *En déduire que pour tout réel* $x>0$, $g(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)$

   c) *Démontrer que f admet une limite finie en zéro. Préciser cette limite.*

   On prolonge par continuité la fonction f en zéro en posant $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

4. a) *En étudiant le sens de variation de la fonction* $x\mapsto \frac{1}{2}(x\ln x-x)-f(x)-f(0)$ *) sur* $]0,1]$ *montrer que pour tout* $x\in]0,1]$, $f(x)-f(0)\leq \frac{1}{2}(x\ln x-x)$

   b) *Démontrer que f n'est pas dérivable à droite en zéro. Que peut-on dire de la courbe* (C_f) *au point d'abscisse zéro ?*

   c) *Tracer l'allure de la courbe* (C_f) *(On donne* $f(0)\approx 0,9$; $f(2)\approx 0,1$; $f(3)\approx 0,2$ *et* $f(4)\approx 0,3$ *)*.

EXERCICE 6:

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n=\int_0^{\pi} e^x\cos(nx)dx$

1. *Montrer que, pour tout entier naturel n,* $\cos(n\pi)=(-1)^n$ *et que* $\sin(n\pi)=0$

2. *A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que* $I_n=\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2}$

3. *Montrer que, pour tout entier naturel n,* $|I_n|\leq \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$