Exercice 1 « Fonction Exponentielle »

Exercice 1

On considère la fonction numérique f définie sur $\left]-\infty;0\right]$ *par :* $f(x)=\sqrt{1-e^{x}}$

et (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=-\infty$, *et interpréter géométriquement le résultat.*

2- *Montrer que:* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$, *et en déduire la nature de la branche infinie de* (C) *au voisinage de* $-\infty$.

3- *Calculer* $f'(x)$ *pour tout x de l'intervalle* $\left]-\infty;0\right]$ *et dresser le tableau de variations de f.*

4- *Montrer que f admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur l'intervalle* $\left[0;1\right[$ *, et que :*

$f^{-1}(x)=\ln(1-x^{2})$ *pour tout x de* $\left[0;1\right[$.

5- *Tracer dans le même repère (O;i,7), la courbe* (C) *et la courbe* (C') *de la fonction* f^{-1}

Correction Exercice 1

$f(x)=\sqrt{1-e^{x}}$

1) *Montrons que:* $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

Soit $x\in\left]-\infty;0\right[$, *on a :* $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{1-e^{x}}}{x}=-\sqrt{\frac{1-e^{x}}{x^{2}}}$

$$=-\sqrt{\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)\times\left(\frac{-1}{x}\right)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}-\sqrt{\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)\times\left(\frac{-1}{x}\right)}=-\infty$ *(Car :* $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)=1$ *et* $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{-1}{x}\right)=+\infty$)

D'où: $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=-\infty}$

Interprétation géométrique:

On a: $f(0)=0$ *et* $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à gauche de 0, et que la courbe (C) de f admet une demi-tangente en O dirigée en haut.

2) *Montrons que:* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-e^{x}}=1$ *(car* $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$)

donc: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1}$

Interprétation géométrique :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ *donc la droite d'équation:* $y=1$ *est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de* $-\infty$.

3) *Calculons* $f'(x)$ *pour tout* $x\in\left]-\infty;0\right[$ *:*

On a : la fonction $x \mapsto 1-e^{x}$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $1-e^{x}>0$ pour tout $x\in]-\infty;0[$ donc, la fonction f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et on a : $(\forall x\in]-\infty;0[)\ f'(x)=\dfrac{(1-e^{x})'}{2\sqrt{1-e^{x}}}=\dfrac{-e^{x}}{2\sqrt{1-e^{x}}}$

$x\in]-\infty;0[$ On a : $-e^{x}<0$ et $\sqrt{1-e^{x}}>0$ donc: $f'(x)<0$

D'où : $(\forall x<0)$ $\boxed{f'(x)<0}$

Le tableau de variations de f est le suivant:

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	$-$	$-\infty$ ‖
$f(x)$	1 ↘	0

4) ■ Montrons que: f admet une fonction réciproque

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(]-\infty;0[)$ telle que : $f(]-\infty;0[)=\left[f(0);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[=[0;1[$

■ Montrons que : $f^{-1}(x)=\ln(1-x^{2})$ pour tout $x\in[0;1[$

Soit $x\in[0;1[$ et $y\in]-\infty;0[$ tels que : $f^{-1}(x)=y$

On a : $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow f(y)=x\\
&\Leftrightarrow \sqrt{1-e^{y}}=x\\
&\Leftrightarrow 1-e^{y}=x^{2}\\
&\Leftrightarrow e^{y}=1-x^{2}\\
&\Leftrightarrow y=\ln(1-x^{2})
\end{aligned}$$

Donc : $(\forall x\in[0;1[)$ $\boxed{f^{-1}(x)=\ln(1-x^{2})}$

5) Construction de (C) et (C')

La courbe (C') est le symétrique de la courbe (C) par rapport à la première bissectrice dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$