

Exercice 1 :

Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + 3u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
- 3) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est non nul.

On pose : $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$

- a) Calculer les trois premiers termes de la suite (v_n) .
- b) Déterminer la nature de (v_n) .
- c) Exprimer v_n en fonction de n .

Exercice 2 :

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$; $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$

- 1) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
- 2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_{2n} = H_{2n} - H_n$
- 3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$
- 4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; T_{3n} = \frac{1}{2} H_n - \frac{1}{2} H_{3n}$
- 5) Montrer que la suite $(T_{3n})_{n \geq 1}$ est convergente et préciser sa limite.
- 6) Montrer que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ est Convergente et préciser sa limite.

Exercice 3 :

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = u_{n+1} + u_n$
Montrer que la suite (S_n) est géométrique. Déduire l'expression de S_n en fonction de n .

- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $v_n = (-1)^n u_n$ et $t_n = v_{n+1} - v_n$.

Exprimer t_n en fonction de S_n .

- 3) Exprimer v_n et u_n en fonction de n . (Indication : calculer $t_0 + t_1 + \dots + t_n$ de deux façons).

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{u_n} \quad (\forall n \geq 1) \end{cases}.$$

1) a) Calculer u_1

b) Les valeurs de $u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 ; u_6 ; u_7 ; u_8 ; u_8 ; u_9 ; u_{10} ; u_{11}$ sont respectivement égales à : 45;77;117;165;221;285;357;437;525;621

A partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$d_n = u_{n+1} - u_n.$$

Exercice 5

On considère la série harmonique $(H_m)_{m \geq 1}$ définie pour tout nombre entier $m \geq 1$ par :

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$$

On propose de démontrer que la suite $(H_m)_{m \geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

1. Démontrer que la suite $(H_m)_{m \geq 1}$ est strictement croissante.

2. Pour tout nombre entier $m \geq 1$, on pose l'entier $N_m = E\left(\frac{\ln(m)}{\ln(2)}\right)$.

a) Montrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} N_m = +\infty$.

b) Montrer que $\forall m \geq 1; \frac{m}{2} < 2^{N_m} \leq m$ et en déduire que $\forall m \geq 1; H_m \geq H_{2^{N_m}}$.

c) Démontrer qu'il est suffisant de prouver que la suite $(H_{2^n})_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$ pour prouver que la suite $(H_m)_{m \geq 1}$ tend vers $+\infty$.

3. Pour cette question, on fixe un nombre entier $n \geq 0$

a) Donner le nombre d'éléments de l'ensemble $E_n = \{k \in \mathbb{N} / k \geq 2^n + 1 \text{ et } k \leq 2^{n+1}\}$.

b) Montrer que $\forall k \in E_n; \frac{1}{k} \geq 2^{-(n+1)}$.

c) En déduire que : $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$

4. Démontrer que $\forall n \geq 0; H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

5. Déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_{2^n} = +\infty$ et par suite que la suite $(H_m)_{m \geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 6

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$u_n = \frac{\alpha^2 + (n-1)}{\alpha}$$

1) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et son premier terme.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
Calculer S_n en fonction de α et n .

3) Soit la suite (v_n) définie $n \in \mathbb{N}^*$ par : $v_n = \frac{S_n}{n^2}$

Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geq 2$ par :
$$\begin{cases} u_2 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - u_n^2}}}{2} \end{cases}$$

1/ Calculer u_3 ; u_4 et u_5 .

2/ Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $u_{n+1} \leq u_n$

3/ On considère (v_n) la suite définie par : $u_n = \sin v_n$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; donner sa raison et son premier terme.

b) Exprimer u_n en fonction de n et Calculer $\sin \frac{\pi}{16}$

Exercice 8

Soit la suite (u_n) définie :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 12} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) a) Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

b) Quel semble être la limite de (u_n) ?

2) Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.

En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n) .