

EXERCICE 1

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$(S) \begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u;v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.

(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).

Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2. a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à : $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$

b) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$.

3. a) Trouver un couple $(u;v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.

On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

EXERCICE 2

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $3x - 2y = 1$.

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que le couple $(14n + 3; 21n + 4)$ est une solution de (E).

b) En déduire que $\text{pgcd}(14n + 3; 21n + 4) = 1$.

3) Soit d le plus grand commun diviseur de $2n + 1$ et $21n + 4$.

a) Montrer que $d = 1$ ou $d = 13$.

b) Montrer que $n \equiv 6[13] \Leftrightarrow d = 13$.

4) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

a) Montrer que A et B sont divisibles par $n - 1$ dans $\mathbb{Z}$.

b) Déterminer en fonction de n , le pgcd de A et B .

EXERCICE 3

I. a et b sont des entiers naturels tels que : $\text{PGCD}(a + b, ab) = p^2$, p étant un entier naturel premier.

1) Montrer que p^2 divise a^2

On remarquera que : $a^2 = a(a + b) - ab$

2) En déduire que p divise a .

3) Montrer que p divise b .

4) Démontrer que $\text{PGCD}(a, b) = p$ ou $\text{PGCD}(a, b) = p^2$.

II. On cherche à déterminer les entiers naturels a et b tels que : $\text{PGCD}(a + b, ab) = 49$ et $\text{PPCM}(a, b) = 231$.

1) Soit a et b deux tels entiers. Montrer que $\text{PGCD}(a, b)$ ne peut être 49, mais est égal à 7.

2) Quelles sont les solutions du problème posé.

EXERCICE 4:

Soit x un entier relatif.

1. a. Déterminer tous les restes possibles de x^3 modulo 9.

b. Donner deux valeurs de l'entier a tel que :

$$x^3 \equiv a^3 [9] \text{ Si et seulement si } x \equiv a [3].$$

2. x, y et z sont trois entiers relatifs tels que $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9.

Montrer que l'un des nombres x, y ou z est divisible par 3.

EXERCICE 5:

Soit le nombre $A = 2011^{2010} - 1$

1. Déterminer les restes respectifs modulo 4 et modulo 5 de A .

2. En déduire que A est divisible par 20.

EXERCICE 6:

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 7. On pose : $n = p^4 - 1$.

1. a. Montrer que l'on ait $p \equiv 1 [3]$ ou $p \equiv -1 [3]$

b. En déduire que n est divisible par 3.

2. a. Vérifier que p est impair. En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que : $p^2 - 1 = 4k(k+1)$.

b. En déduire que n est divisible par 16.

3. a. Quel sont les restes possibles de p modulo 5 ?

b. En déduire que 5 divise n , et par suite que 240 divise n .

EXERCICE 7:

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 11n - 24m = 1$.

a. Vérifier que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer un couple (m, n) solution de (E) .

c. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

2. a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$

b. Montrer que si (m, n) est solution de (E) alors : $(10^{11} - 1) - 10(10^{24} - 1) = 9$.

c. Montrer que : $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$ (on pourra utiliser la factorisation de $a^n - b^n$).

d. En déduire qu'il existe deux entiers M et N tels que : $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$

e. Montrer que tout diviseur commun à $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ divise 9.

f. En déduire le pgcd de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

EXERCICE 8:

1. Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E): 3x - 8y = 5$.

Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x = 8k - 1$ et $y = 3k - 1$.

2. a. Soient n, x et y trois entiers tels que :

$$\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$$

Montrer que (x, y) est une solution de (E) .

b. On considère le système $(S): \begin{cases} n \equiv 2 [3] \\ n \equiv 7 [8] \end{cases}$ Où n est un entier.

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23 [24]$.

3. a. Soit k un entier naturel.

Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b. Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $1991^{2008} - 1$ est divisible par 24.