

Exercice 1 (17pts) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\text{Arc tan } x} - \frac{1}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1pt 1) a- Étudier la parité de f .

2pt b- Montrer que : $(\forall x > 0) \quad x - \frac{1}{3}x^3 < \text{Arc tan } x < x$

1pt c- En déduire que la fonction f est continue en 0.

1,5pt 2) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

3) a- Soit $x \in]0, +\infty[$. En utilisant le théorème de **Rolle** à la fonction

2pt $\varphi : t \mapsto (x - \text{Arc tan } x)t^3 - x^3(t - \text{Arc tan } t)$ et sur l'intervalle $[0, x]$, montrer que :

$$(\exists c \in]0, x[) : \frac{x - \text{Arc tan } x}{x^3} = \frac{1}{3(1+c^2)}$$

1pt b- En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \text{Arc tan } x}{x^3} = \frac{1}{3}$

1pt c- Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = \frac{1}{3}$.

4) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

2pt $(\forall x > 0) : f'(x) = \frac{1}{x^2 \text{Arc tan}^2(x)} \left(\text{Arc tan}^2(x) - \frac{x^2}{1+x^2} \right)$

5) a- En utilisant le **théorème des accroissements finis**, montrer que :

1,5pt $(\forall x > 0) : \text{Arc tan } x > \frac{x}{1+x^2}$

1pt b- Étudier la monotonie de la fonction $g : x \mapsto \text{Arc tan}^2(x) - \frac{x^2}{1+x^2}$ sur $[0, +\infty[$

2pt 6) En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, puis donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

1pt 7) Construire la courbe (C) .

Exercice 2 (3pts) :

Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telles que :

$$f(a) < a, \quad f(b) < b \quad \text{et} \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{a+b}{2}$$

1,5pt 1) Montrer que : $(\exists (\alpha, \beta) \in (]a, b[)^2) : f(\alpha) = \alpha \quad \text{et} \quad f(\beta) = \beta \quad \text{avec} \quad \alpha < \beta$

1,5pt 2) En utilisant le théorème de **Rolle** à la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x) - x}{x}$, montrer que :

$$(\exists c \in]a, b[) : f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$