

Exercice 25

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par: $f(x) = \frac{2e^{2x} - 2}{2e^{2x} - 5e^x + 2}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère

Orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- Déterminer D l'ensemble de définition de f , et étudier la parité de f .

Étudier les variations de f .

3- a. Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

b. Déterminer les branches infinies de (C) .

c. Tracer la courbe (C) .

Solution

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - 2}{2e^{2x} - 5e^x + 2}$$

1) Déterminons D :

$$\text{On a: } x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } 2e^{2x} - 5e^x + 2 \neq 0$$

$$\text{On pose } t = e^x \text{ avec } t > 0 ; \text{ l'équation: } 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0 \text{ devient: } 2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\text{Résolvons dans } \mathbb{R}, \text{ l'équation } 2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\text{Le discriminant de cette équation est: } \Delta = 9, \text{ et ses solutions sont: } t_1 = \frac{1}{2} \text{ et } t_2 = 2$$

$$\text{Donc: } x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} ; e^x \neq \frac{1}{2} \text{ et } e^x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} ; x \neq \ln \frac{1}{2} \text{ et } x \neq \ln 2$$

$$\text{Donc: } D = \left] -\infty; \ln \frac{1}{2} \right[\cup \left] \ln \frac{1}{2}; \ln 2 \right[\cup \left] \ln 2; +\infty \right[$$

2) Étudions la parité de f : Soit $x \in D$, on a: $-x \in D$ et

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{2e^{2(-x)} - 2}{2e^{2(-x)} - 5e^{(-x)} + 2} \\ &= \frac{(2 - 2e^{2x})e^{2x}}{(2 - 5e^x + 2e^{2x})e^{2x}} \\ &= -\frac{2e^{2x} - 2}{2e^{2x} - 5e^x + 2} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Donc f est une fonction impaire.

2) Étudions les variations de f

Puisque f est une fonction impaire, alors il suffit de l'étudier sur Ensemble: $\left] 0; \ln 2 \right[\cup \left] \ln 2; +\infty \right[$

Calcul des limites

Tableau de signe de $f(x)$

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$2e^{2x} - 5e^x + 2$	$-$	$\parallel$	$+$

Soit $x \in [0; \ln 2[\cup] \ln 2; +\infty[$, on a :

■ Calculons: $\lim_{x \rightarrow (\ln 2)^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow (\ln 2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\ln 2)^-} \frac{2e^{2x} - 2}{2e^{2x} - 5e^x + 2} = -\infty \quad (\text{Car } \lim_{x \rightarrow (\ln 2)^-} 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow (\ln 2)^-} 2e^{2x} - 2 = 6)$$

Donc: $\boxed{\lim_{x \rightarrow (\ln 2)^-} f(x) = -\infty}$

■ Calculons: $\lim_{x \rightarrow (\ln 2)^+} f(x)$

Soit $x \in [0; \ln 2[\cup] \ln 2; +\infty[$, on a : $\lim_{x \rightarrow (\ln 2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\ln 2)^+} \frac{2e^{2x} - 2}{2e^{2x} - 5e^x + 2} = +\infty$

(Car $\lim_{x \rightarrow (\ln 2)^+} 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow (\ln 2)^+} 2e^{2x} - 2 = 6$)

Donc: $\boxed{\lim_{x \rightarrow (\ln 2)^+} f(x) = +\infty}$

■ Calculons: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Soit $x \in [0; \ln 2[\cup] \ln 2; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 - 2e^{-2x})e^{2x}}{(2 - 5e^{-x} + 2e^{-2x})e^{2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 - 2e^{-2x})}{(2 - 5e^{-x} + 2e^{-2x})} = 1 \quad (\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0) \end{aligned}$$

Donc: $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$

■ Calculons: $f'(x)$

La fonction f est dérivable en tout point de son ensemble de définition car c'est le quotient de deux fonctions dérivables

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in D, \text{ on a: } f'(x) &= \left(\frac{2e^{2x} - 2}{2e^{2x} - 5e^x + 2} \right)' \\ &= \frac{4e^{2x}(2e^{2x} - 5e^x + 2) - (2e^{2x} - 2)(4e^{2x} - 5e^x)}{(2e^{2x} - 5e^x + 2)^2} \\ &= \frac{\cancel{4e^{2x}} \times \cancel{2e^{2x}} - 4e^{2x} \times 5e^x + 2 \times 4e^{2x}}{(2e^{2x} - 5e^x + 2)^2} \\ &\quad - \frac{\cancel{4e^{2x}} \times \cancel{2e^{2x}} + 2 \times 4e^{2x} + 2e^{2x} \times 5e^x - 2 \times 5e^x}{(2e^{2x} - 5e^x + 2)^2} \\ &= \frac{-20e^{3x} + 10e^{3x} + 16e^{2x} - 10e^x}{(2e^{2x} - 5e^x + 2)^2} \\ &= \frac{2e^x(-5e^{2x} + 8e^x - 5)}{(2e^{2x} - 5e^x + 2)^2} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in D) \quad f'(x) = \frac{2e^x(-5e^{2x} + 8e^x - 5)}{(2e^{2x} - 5e^x + 2)^2}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(-5e^{2x} + 8e^x - 5)$

On pose $X = e^x$, et on obtient: $-5e^{2x} + 8e^x - 5 = -5X + 8X - 5$

Le discriminant de l'équation : $-5X + 8X - 5 = 0$ est négatif ; donc: $-5X + 8X - 5 < 0$

D'où: $(\forall x \in D) ; -5e^{2x} + 8e^x - 5 < 0$

Donc : $(\forall x \in D) \quad f'(x) < 0$

Alors f est strictement décroissante sur chacun des intervalles de D .

f est une fonction impaire donc elle conserve la monotonie et inverse les limites

Tableau de variations de f

x	$-\infty$	$\ln \frac{1}{2}$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-
$f(x)$	$-1 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1$	

3) a. Equation de la tangente au point d'abscisse 0:

On a: $f(0) = 0$ et $f'(0) = -4$; donc l'équation de la tangente est: $y = -4x$

b. On a: $\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ donc la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$.

On a: $\lim_{x \rightarrow (\ln 2)^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\ln 2)^-} f(x) = -\infty$ donc (C) admet une asymptote verticale d'équation: $x = \ln(2)$.

On a: $\lim_{x \rightarrow (\ln \frac{1}{2})^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\ln \frac{1}{2})^-} f(x) = -\infty$ donc (C) admet une asymptote verticale d'équation: $x = \ln(2)$.

c. Construction Graphique

