



Série n° 5 d'exercices corrigés « Fonction Logarithmique »

Exercice n°1.

Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions ci-dessous

$$1) f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + 2\ln x$$

$$2) f(x) = \frac{2\ln x}{\ln 3}$$

$$3) f(x) = \ln(4-x) + \ln x$$

$$4) f(x) = x \ln x - x$$

$$5) f(x) = x^2 \ln x$$

$$6) f(x) = \ln(2x-5)$$

$$7) f(x) = \ln(-3x+1)$$

$$8) f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$$

$$9) f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$10) f(x) = \ln(\ln x)$$

$$11) f(x) = x \ln(2x-3)$$

$$12) f(x) = 2x(1-\ln x)$$

$$13) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$14) f(x) = \frac{x - \ln x}{x^2}$$

$$15) f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x - 4$$

$$16) f(x) = \ln x^2$$

$$17) f(x) = (\ln x)^2$$

$$18) f(x) = \ln(1-x^2)$$

Correction Exercice n°1.

1) La fonction définie par $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + 2\ln x$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui sont définies et dérivables sur le même

intervalle et :
$$\left(\forall x \in]0; +\infty[\right) f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{x} = \frac{4-x}{2x}$$

2) La fonction définie par $f(x) = \frac{2\ln x}{\ln 3}$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de la

fonction $x \mapsto \ln x$ par le réel $\frac{2}{\ln 3}$ et on a :
$$\left(\forall x \in]0; +\infty[\right) f'(x) = \frac{2}{x \ln 3}$$

3) La fonction définie par $f(x) = \ln(4-x) + \ln x$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[\cap]-\infty; 4[=]0; 4[$ et on a :

$$\left(\forall x \in]0; 4[\right) f'(x) = \frac{-1}{4-x} + \frac{1}{x} = \frac{-x+4-x}{x(4-x)}$$

Donc :
$$\left(\forall x \in]0; 4[\right) f'(x) = \frac{2(2-x)}{x(4-x)}$$

4) La fonction définie par $f(x) = x \ln x - x$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit et somme de fonction usuelles et qui sont définies et dérivables sur $]0; +\infty[$, et on a :

$$\left(\forall x \in]0; +\infty[\right) f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \quad \text{donc : } \left(\forall x \in]0; +\infty[\right) f'(x) = \ln x$$

5) La fonction définie par $f(x) = x^2 \ln x$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de deux fonctions qui sont définies et dérivables sur $]0; +\infty[$, et on a :

$$\left(\forall x \in]0; +\infty[\right) f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \quad \text{donc : } \left(\forall x \in]0; +\infty[\right) f'(x) = x(2 \ln x + 1)$$

6) La fonction définie par $f(x) = \ln(2x-5)$ est définie et dérivable sur $\left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$ (car $X \mapsto \ln X$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $2x-5 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$) et $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 2x-5 \Rightarrow u'(x) = 2$

On obtient : $\boxed{\left(\forall x \in \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[\right) \quad f'(x) = \frac{2}{2x-5}}$

7) La fonction définie par $f(x) = \ln(-3x+1)$ est définie et dérivable sur $\left] -\infty; \frac{1}{3} \right[$ (car $X \mapsto \ln X$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $-3x+1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[$) et $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = -3x+1 \Rightarrow u'(x) = -3$

On obtient : $\boxed{\left(\forall x \in \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[\right) \quad f'(x) = \frac{-3}{-3x+1}}$

8) La fonction définie par $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ n'est définie que pour les valeurs de x pour lesquelles $x^2+x+1 > 0$. Si on note $P(x) = x^2+x+1$, le calcul de son discriminant fournit $\Delta = -3$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 > 0$, donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(u(x))$

avec $u(x) = x^2+x+1 \Rightarrow u'(x) = 2x+1$. Ainsi $\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}}$

9) La fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ n'est définie que pour les valeurs de x pour lesquelles $\frac{x-1}{x+1} > 0$

Si on note $P(x) = \frac{x-1}{x+1}$, le tableau de signes de P est donné par :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$P(x) = \frac{x-1}{x+1}$	$+$	$-$	0	$+$

Ainsi, f est définie sur $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. Puisque P est dérivable sur $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, puisque pour tout $x \in] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ $\frac{x-1}{x+1} > 0$ et puisque $X \rightarrow \ln X$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, on conclut que f est dérivable sur $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. Pour tout $x \in] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, puisque $f(x) = \ln(P(x))$, on aura

$f'(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$. Puisque $P(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = x-1$ et $v(x) = x+1$, on aura

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

Donc :
$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

10) La fonction définie par $f(x) = \ln(\ln x)$ n'est définie que pour les valeurs de x pour lesquelles $\ln x > 0$ c'est-à-dire $D_f =]1; +\infty[$

Pour tout $x \in]1; +\infty[$, puisque $f(x) = \ln(u(x))$ où $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$ on obtient :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

Donc :
$$f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

11) La fonction définie par $f(x) = x \ln(2x-3)$ est définie et dérivable sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont (car $X \rightarrow \ln X$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $2x-3 > 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{3}{2}; +\infty[$

Puisque pour tout $x \in]\frac{3}{2}; +\infty[$ $f(x) = u(x)v(x)$ où $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(2x-3)$, on en déduit ;

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \ln(2x-3) + x \times \frac{2}{2x-3} \\ &= \ln(2x-3) + \frac{2x}{2x-3} \end{aligned}$$

Donc :
$$f'(x) = \frac{(2x-3)\ln(2x-3) + 2x}{2x-3}$$

12) La fonction définie par $f(x) = 2x(1-\ln x)$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x \in]0; +\infty[$ $f(x) = u(x)v(x)$ où $u(x) = 2x$ et $v(x) = 1-\ln(x)$, on en déduit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2 \times (1-\ln(x)) + 2x \times \left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= 2 - 2\ln(x) - 2 \end{aligned}$$

Donc :
$$f'(x) = -2\ln x$$

13) La fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de

fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x \in]0; +\infty[$ $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x$, on en

$$\begin{aligned} \text{dédit : } f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}}$

14) La fonction définie par $f(x) = \frac{x - \ln x}{x^2}$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x \in]0; +\infty[$ $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = x - \ln x$ et $v(x) = x^2$, on en déduit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \times x^2 - (x - \ln(x)) \times 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x^2 - x - 2x^2 + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-x^2 - x + 2x \ln x}{x^4} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{f'(x) = \frac{2 \ln x - x - 1}{x^3}}$

15) La fonction définie par $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x - 4$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et composée de fonctions qui le sont. Pour tout $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^{2-1} - 2 \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}}$

16) La fonction définie par $f(x) = \ln x^2$ est définie et dérivable sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. En effet $x \mapsto x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, tandis que $X \rightarrow \ln(X)$ n'est définie et dérivable que sur $]0; +\infty[$. Or : $x^2 \in]0; +\infty[\Leftrightarrow x \in] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. Pour tout $x \in] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2} \quad \text{Donc : } \boxed{f'(x) = \frac{2}{x}}$$

17) La fonction définie par $f(x) = (\ln x)^2$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que composée de fonctions qui le sont. En effet $x \rightarrow \ln x$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, tandis que $X \rightarrow X^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in]0; +\infty[$ $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} (\ln x)^{2-1}$ Donc : $\boxed{f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}}$

18) La fonction définie par $f(x) = \ln|1 - x^2|$ est définie et dérivable pour toutes les valeurs de x telles que : $1 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \in] -\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$. Selon la valeur de x , l'expression de $f(x)$ n'est pas la même. Pour tout $x \in] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $1 - x^2 < 0$ donc $|1 - x^2| = x^2 - 1$ et par suite $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ alors : $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

Pour tout $x \in]-1;1[$, $1-x^2 > 0$ donc $|1-x^2| = 1-x^2$ et par suite $f(x) = \ln(1-x^2)$ alors :

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{2x}{x^2-1} \quad \text{Donc Pour tout } x \in]-\infty; -1[\cup]-1;1[\cup]1; +\infty[: \boxed{f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}}$$

Exercice n° 2.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(ax+b)$, et C sa courbe représentative.

1) Déterminer les nombres a et b tels que $f(2) = 0$ et $f'(3) = \frac{3}{4}$

Quel est alors l'ensemble de définition de f ?

Quel est le sens de variation de f ?

2) Déterminer les nombres a et b tels que la courbe C passe par le point $A(2;0)$ et la tangente en A ait pour coefficient directeur -2 .

Correction Exercice n° 2.

$$f(x) = \ln(ax+b)$$

1) $f(2) = 0$ se traduit par l'équation $\ln(2a+b) = 0 \Leftrightarrow 2a+b=1$

De plus $f'(x) = \frac{a}{ax+b}$ donc $f'(3) = \frac{3}{4}$ se traduit par $\frac{a}{3a+b} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4a = 3(3a+b) \Leftrightarrow 5a+3b=0$

On doit résoudre le système : $\begin{cases} 5a+3b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{f(x) = \ln(3x-5)}$, qui est définie si et seulement si $3x-5 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{5}{3}; +\infty \right[$.

$$\text{Ainsi } D_f = \left] \frac{5}{3}; +\infty \right[$$

La fonction f est la composée de deux fonctions strictement croissantes donc est strictement croissante sur $\left] \frac{5}{3}; +\infty \right[$

2) La courbe C passe par le point $A(2;0)$ implique $f(2) = 0 \Leftrightarrow \ln(ax+b) = 0 \Leftrightarrow 2a+b=1$ La tangente en A ait pour coefficient directeur -2 implique $f'(2) = -2$, c'est-à-dire :

$$\frac{a}{2a+b} = -2 \Leftrightarrow a = -2(2a+b) \Leftrightarrow 5a+2b=0$$

On doit résoudre le système : $\begin{cases} 5a+2b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$ Ainsi $\boxed{f(x) = \ln(-2x+5)}$

Exercice n° 3.

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1) Etudier le sens de variation de g

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

- 1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter géométriquement ce résultat.
- 2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C) . Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0; +\infty[$. Montrer que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on précisera
- 3) Etudier le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f
- 4) Montrer qu'il existe un unique point B de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à (Δ) . Préciser les coordonnées du point B
- 5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α . Exprimer $\ln(\alpha)$ en fonction de α .
Montrer que le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est supérieur à 1. On admettra que : $31.10^{-2} < \alpha < 35.10^{-2}$
- 6) Représenter la courbe (C) ; la tangente (T) et la droite (Δ) .

Correction Exercice n° 3

Partie I

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \quad g(x) = x^2 - 2 \ln x$$

1) g est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, et pour tout

$$x \in]0; +\infty[\quad g'(x) = 2x - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

le signe de $g'(x)$ sera donné par le signe de $(x-1)(x+1)$, expression dont les racines sont -1 et 1 .

Ainsi, pour $x \in]0; 1[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0; 1[$, et pour tout $x \in]1; +\infty[$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

2) Sur $]0; +\infty[$; g atteint donc son minimum lorsque $x = 1$, et comme $g(1) = 1^2 - 2 \times \ln 1 = 1 - 0 = 1$ on peut

affirmer que pour tout $x \in]0; +\infty[$ $g(x) > 0$

Partie II

1) Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, on en déduit par quotient et somme, que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ (c'est à dire l'axe de ordonnées) est donc asymptote verticale à la courbe (C) .

2) On transforme l'écriture de $f(x)$: Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$

En utilisant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (la limite de croissance comparée); puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$; on

déduit par somme que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

De plus pour tout $x \in]0; +\infty[$ $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ on aura donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) = 0$$

Interprétation géométrique :

La droite (Δ) d'équation $2xy =$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$. Pour connaître la position relative de (C) et (Δ) , on étudie le signe de la différence $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1 + \ln x}{x}$; on a :

$$f(x) - \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

$$\text{Donc } f(x) - \frac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow x \in [e^{-1}; +\infty[$$

$$\text{Et } f(x) - \frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow x \in]0; e^{-1}]$$

Ainsi (C) et (Δ) sont sécantes au point A d'abscisse e^{-1} et d'ordonnée $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e}$

De plus, sur $]0; e^{-1}]$ la courbe (C) est au-dessous de (Δ), et sur $[e^{-1}; +\infty[$ la courbe (C) est au-dessus de (Δ).

3) f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{x \times \frac{1}{x} - (1 + \ln x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\ln x}{x^2} \\ &= \frac{1}{2x^2} (x^2 - 2 \ln x) \\ &= \frac{1}{2x^2} g(x) \end{aligned}$$

On considère la fonction numérique g définie sur par : $g(x) = x^2 - 2 \ln x$

Puisque pour tout $x \in]0; +\infty[$ $\frac{1}{2x^2} > 0$ et $g(x) > 0$ (question 2 **partie I**), on conclue que pour tout $x \in]0; +\infty[$ $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4) La droite (Δ) a un coefficient directeur égal à $\frac{1}{2}$. Le coefficient directeur de la tangente (T) en un point d'abscisse a est égal à $f'(a) = \frac{1}{2} - \frac{\ln a}{a^2}$

La tangente (T) sera parallèle à (Δ) si et seulement si ces deux droites ont même coefficient directeur, donc si et seulement si $f'(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a^2} = 0 \Leftrightarrow a = 1$

C'est donc au point B d'abscisse 1 et d'ordonnée $f(1) = \frac{3}{2}$ que la tangente (T) sera parallèle à (Δ).

5) Sur $]0; +\infty[$, f est continue en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont. De plus elle est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Enfin, puisque $f(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$

Et $0 \in]-\infty; +\infty[$

Alors d'après Le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel α dans l'intervalle $]0; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Par définition, $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{1+\ln \alpha}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ln \alpha = -\frac{\alpha^2}{2} - 1}$

Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est égal à :

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{1}{2} - \frac{\ln \alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{\alpha^2}{2} - 1}{\alpha^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha^2} = 1 + \frac{1}{\alpha^2} > 1 \end{aligned}$$

Ce coefficient est donc supérieur à 1

Construction de (C) ; (T) et (Δ)

