

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

(ζ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$.

(la partie II est liée à la fonction f de cette partie)

PARTIE I

1- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (ζ) .

c) Etudier la position relative de (ζ) et la droite (Δ) .

2- On pose : $(\forall x \in I) ; g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$

a) Vérifier que : $(\forall x \in]0; 1[) ; g(x) < 0$ et $(\forall x \in]1; +\infty[) ; g(x) > 0$.

b) Montrer f que est dérivable sur I et que : $(\forall x \in I) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$;

puis dresser le tableau de variations de f .

c) Vérifier que : $(\forall x \in I) ; f''(x) = \frac{3 - 2\ln(x)}{x^3}$ puis étudier la concavité de (ζ) en précisant son point d'inflexion.

d) Tracer (ζ) . (On donne $e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e} \approx 4,5$ et $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \approx 4$)

PARTIE II (Les paragraphes 1, 2 et 3 sont indépendants)

1- On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 < u_n \leq 2$

b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) On pose $a = \frac{3 + \ln 2}{4}$ Montrer que $(\forall x \in]1; 2]) ; 0 < f'(x) \leq a$.

d) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_{n+1} - 1 \leq a(u_n - 1)$; puis que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n - 1 \leq a^n(u_0 - 1)$

e) Dédurre des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

f) Déterminer la plus petite valeur de n pour que 1 soit une valeur approchée de u_n à 10^{-2} près.

2- n est un entier naturel non nul et on considère dans l'intervalle $]0; 1[$ l'équation $(E_n) : f(x) = x + \frac{1}{n}$.

On pose : $(\forall x \in]0; 1[) ; g_n(x) = x + n \ln(x)$

a) Montrer que l'équation (E_n) est équivalente à l'équation $g_n(x) = 0$.

b) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution unique α_n dans $]0; 1[$

c) Etudier la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$

d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$

3- On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; P_n = \frac{e^2}{\sqrt{2}} \times \frac{e^3}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{e^4}{\sqrt[4]{4}} \times \dots \times \frac{e^n}{\sqrt[n]{n}} = \prod_{k=2}^n \frac{e^k}{\sqrt[k]{k}}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; \ln(P_n) = S_n - 1$.

b) Montrer que : $S_n \geq n$; puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(P_n)$.