Examen nationale bac Sc Economie
Session normale 2015

Exercice 1 : (4,5 points)

On considère la suite numérique (U_n) *définie par :* $U_0 = 1$ *et* $U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + 1 \quad (\forall n \in IN)$

1- *Calculer* U_1 *et* U_2.

2- *Montrer par récurrence que :* $(\forall n \in IN) \quad U_n < \frac{5}{4}$.

3- a) *Montrer que :* $(\forall n \in IN) \quad U_{n+1} - U_n = -\frac{4}{5}\left(U_n - \frac{5}{4}\right)$.

b) *Déduire que* (U_n) *est croissante et qu'elle est convergente .*

4- *On pose :* $V_n = U_n - \frac{5}{4} \quad (\forall n \in IN)$

a) *Calculer* V_0.

b) *Montrer que* (V_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{5}$.

c) *Ecrire* V_n en fonction de n ; et déduire que : $(\forall n \in IN) \quad U_n = \frac{1}{4}\left(5 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$.

d) *Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 2 : (11 points)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x) = x + \frac{2}{x} + \ln x$ *; et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1- a) *Montrer que :* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) *Montrer que :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ *et que :* $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = +\infty$ *; puis donner une interprétation géométrique au résultat .*

2- a) *Vérifier que :* $f(x) = x + \frac{2 + x\ln x}{x} \quad (x \in]0;+\infty[)$.

b) *Calculer* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ *puis donner une interprétation géométrique au résultat .*

3- a) *Calculer* $f'(x)$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$.

b) *Vérifier que :* $f'(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2} \quad (x \in]0;+\infty[)$ *et étudier le signe de* $(x-1)(x+2)$ *sur chacun des intervalles* $]0:1]$ *et* $[1;+\infty[$.

c) *Déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle* $[1;+\infty[$ *et décroissante sur l'intervalle* $]0:1]$.

d) *Dresser le tableau de variation de f sur* $]0;+\infty[$.

4- a) *Vérifier que :* $f''(x) = \frac{4-x}{x^3} \quad (x \in]0;+\infty[)$

b) *Etudier le signe de* $f''(x)$ *sur* $]0;+\infty[$ *; puis déduire que (C) admet un point d'inflexion I ces coordonnées sont à déterminer.*

5- a) En intégrant par partie calculer : $\int_{1}^{e} \ln x \, dx$; déduire l'aire de la partie hachurée sur le graphique ci-dessous .

<u>Exercice 3 :</u> (4,5 points)

Une Urne contient 8 boules indiscernable au toucher ; 3 boules Vertes et 5 boules Rouges .
On tire den l'Urne simultanément 2 boules .

1- Montrer que le nombre de tirages possibles est 28 .
2- On considère les événements A et B suivants :
   A « Les deux boules tirées sont de même couleur »
   B « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes »
   a) Montrer que : $P(A) = \frac{13}{28}$.
   b) Calculer $P(B)$.
3- Soit X la variable aléatoire liée au nombre de boules Vertes tirées .
   a) Montrer que : $P(X = 0) = \frac{10}{28}$.
   b) Compléter le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{28}$		

   c) Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de X .