EXAMEN BLANC N° 10 **2éme Bac PC- SVT**

Exercice 1

Urne contient 10 pions: 4 pions Blancs et 6 pions Verts (Ces pions Sont indiscernables au toucher).
1. On tire au hasard 3 pions successivement dans l'urne et sans remise
Soient :
A l'évènement « les trois pions tirés dans l'urne sont blancs »
B l'évènement « le deuxième pion est le seul pion blanc parmi les 3 pions tirés ».
Montrer que: $P(A)=\frac{1}{30}$ *et* $P(B)=\frac{1}{6}$
2. Soit X la variable aléatoire qui associe tout tirage au nombre de pions Blancs parmi le tirage des trois pions Successivement et sans remise.
a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
3. Déterminer la probabilité pour que le troisième pion soit Vert sachant que le premier n'est pas Vert et le deuxième n'est pas Blanc.

Exercice 2

Soient les nombres complexes suivants: $a=2+3i$; $b=4+5i$; $c=6+3i$ *et* $d=4+i$
1. a. Montrer que : $\frac{a-b}{a-c}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
b. Montrer que : $(a-c)^2=2(a-d)(a-b)$
c. En déduire l'écriture trigonométrique du nombre complexe $\frac{a-d}{a-c}$
2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ *les points A ; B ; C et D d'affixes respectifs a ; b ; c et d.*
a. Montrer que: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ *et* $\overline{(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
b. Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.
c. Soient A' *l'image du point* A *par la rotation de centre* B *et d'angle* $\frac{\pi}{4}$ *et* D' *l'image du point* D *par la rotation de centre* C *et d'angle* $-\frac{\pi}{4}$.
Montrer que les droites (AD) *et* $(A'D')$ *sont parallèles.*

Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, *on considère les points suivants :* $A(-1;1;1)$; $B(1;-1;2)$; $C(1;-1;1)$ *et* $D(1;3;1)$.
Soit (S) *la sphère d'équation* $x^2+y^2+z^2+x+y+z-3=0$.
1. a. Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.
b. En déduire que : $x+y=0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC) *et que la droite* (AD) *est perpendiculaire au plan* (ABC).
c. Calculer le volume du quadrilatère $ABCD$.

2. a. Déterminer Ω le centre et le rayon de la sphère (S).

b. Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) de centre H dont déterminera le rayon.

c. Justifier pourquoi $\overrightarrow{\Omega H} \wedge \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

3. Montrer que (AC) coupe la sphère (S) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 4

pour tout n de $\mathbb{N}$; on considère la suite numérique (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{3+4U_n^{\ 2}}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$.

1. a. Montrer que par récurrence que $U_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (U_n) est strictement décroissante.

c. En déduire que la suite (U_n) est convergente.

2. Soit la suite (V_n) définie par : $V_n = \dfrac{1}{U_{n+1}^{\ 2}} - \dfrac{1}{U_n^{\ 2}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Soit n un entier naturel

Montrer que $\dfrac{1}{U_n^{\ 2}} - \dfrac{1}{U_0^{\ 2}} = V_0 + V_1 + ... + V_{n-1}$, et en déduire W_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (U_n).

Problème

Partie A

On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^2 + 2xe^{-x} + 1$

1. a. Montrer que: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.

2. a. Montrer que: $h'(x) = 2e^{-x}\left(x\left(e^x - 1\right) + 1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Montrer que: $x\left(e^x - 1\right) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

c. En déduire que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. En déduire qu'il existe un réel unique α tel que: $h(\alpha) = 0$ et $-1 < \alpha < 0$.

b. montrer que: $h(x) < 0$ pour tout x de $]-\infty;\alpha[$ et $h(x) > 0$ pour tout x de $]\alpha;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction numérique g définie Sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \ln\left(x^2+1\right) + e^x - x - 2$.

Soit (C) la courbe représentative de la t fonction g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a. Montrer que: $g(x) = x\left(2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{e^x}{x} - 1\right) - 2$ pour tout $x > 0$.

b. En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$.

c. Interpréter géométriquement ces résultats.

2 a. Montrer que : $g(x) = x\left(-2\dfrac{\ln(-x)}{-x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - 1\right) + e^x - 2$; pour tout réel strictement négatif x

b. En déduire que $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=-1$.

c. Montrer que: $\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)+x\right)=+\infty$

d. Interpréter géométriquement ces résultats.

3. a. Montrer que: $g'(x)=x\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{2}{x^2+1}\right)$ pour tout x de $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

b. Montrer que: $\frac{e^x-1}{x}>0$ pour tout x de $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

c. dresser le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

4. a. Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif β tel que $g(\beta)=0$.

b. Montrer que $g(1)>0$ et en déduire que $\beta<1$.

5. On considère la fonction f définie sur $]-\infty;0[$ par : $f(x)=g(x)+x$

a. Montrer que: $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}h(x)$ pour tout x de $]-\infty;0[$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

c. En déduire qu'il existe un nombre réel unique λ de $]-\infty;\alpha[$ tel que: $f(\lambda)=0$.

d. Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y=-x$ sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

6. a. Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (On prendra $\lambda\simeq-2,4$)

b. Montrer que : $\frac{-\lambda}{\lambda^2+1}\le\int_\lambda^0\frac{1}{x^2+1}dx\le-\lambda$.

c. En déduire que : $-\lambda\left(\frac{2}{\lambda^2+1}-e^\lambda\right)\le\int_\lambda^0\ln\left(x^2+1\right)dx\le-\lambda\left(2-e^\lambda\right)$.

d. Soit S la surface de la partie du plan délimitée par la droite (D); la courbe (C)) et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=0$.

Montrer que: $-\lambda e^\lambda\le S-\left(1-e^\lambda\right)\le-\left(2+e^\lambda\right)\lambda$.