Exercice 1

L'espace est rapporté a un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

On considère les points $I(1;-1;2)$; $J(0;1;0)$ et $K(-2;0;1)$

1-a- Montrer que $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OK}$.

b-Calculer le volume du tétraèdre OIJK

2-Soit P le plan dont une équation cartésienne est: $x-2y+2z=0$

a- Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire au plan P

b- On note H le point d'intersection de (IJ) et P. Montrer que les coordonnés de H sont $\left(\frac{2}{9};\frac{5}{9};\frac{4}{9}\right)$

3- a-Vérifier que $K \in P$

b- On note Q le plan (IJK).

Montrer qu'une équation cartésienne de Q est : $y+z-1=0$

4-Soit S_1 et S_2 les ensembles des points $M(x;y;z)$ de l'espace qui vérifient respectivement :

$S_1 : x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$ et $S_2 : x^2+y^2+z^2-2y-3=0$

Montrer que S_1 et S_2 sont deux sphères de centres I et J respectivement.

Précisera leurs rayons R_1 et R_2

5- a-Montrer que le plan P coupe la sphère S_1 suivant le cercle (Γ) de centre H et de rayon $r=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

b- En déduire que les deux sphères S_1 et S_2 se coupent selon le cercle (Γ)

6- a-Montrer que le plan Q coupe les deux sphères S_1 et S_2 selon deux cercles (Γ_1) et (Γ_2) dont on précisera les centres et les rayons

b-Vérifier que les deux cercles (Γ_1) et (Γ_2) sont sécants

7- a- Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (HK) est :

$$\begin{cases} x=-2+4t \\ y=a \\ z=1-t \end{cases} \quad /t \in \mathbb{R}$$

b- En déduire que les trois cercles (Γ) ; (Γ_1) et (Γ_2) se coupent en deux points E et F dont les coordonnées sont respectivement $(2;1;0)$ et $\left(\frac{-14}{9};\frac{1}{9};\frac{8}{9}\right)$

Exercice 2

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 4}{u_n + 2} \end{cases}$; pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ; 0\le u_n < 4$.
3. Étudier le monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n + 1}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$
   a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, on déterminera sa raison.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k + 1}$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 3

1) Résoudre dans l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A ; B ; C et D d'affixes respectives : $a = 1 - i\sqrt{3}$; $b = 2 + 2i$; $c = \sqrt{3} + i$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}$
   a) Vérifier que : $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$.
   b) En déduire que A ; B ; C et D sont alignées.
3) On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe M' l'image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$

3) Vérifier que : $z' = \dfrac{1}{2}az$
4) Soit H(h) l'image du point B par la rotation R, et le point P(p), tel que : $p = a - c$
   a) Vérifier que : $h = ip$.
   b) Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.

Exercice 4

Une urne contient 2 boules noires et 8 boules blanches.
1) Un joueur tire successivement 5 boules en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage. S'il tire une boule blanche, il gagne 2 points dans le cas contraire il perd trois points. Soit X le nombre de points obtenus par le joueur en une partie.
   a) Dresser le tableau définissant la loi de X.
   b) Calculer E(X) et V(X).
2) Le joueur tire 5 boules simultanément, les 10 boules de l'urne étant numérotées de 1 à 10.
Soit Y le plus grand des numéros tirés.

Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer E(Y).

Problème

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=2x^2-4\ln x+4$.

1. Déterminer g' la fonction dérivée de la fonction g et prouver que, pour tout nombre réel x strictement positif : $g'(x)=\dfrac{4x^2-4}{x}$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations (on ne demande pas le calcul des limites).

3. Déterminer le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B Dans toute la suite du problème, on étudie la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2x-3+4\dfrac{\ln x}{x}$. On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a) Déterminer la limite de f en 0.
   b) Interpréter graphiquement le résultat précédent.
2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Démontrer que la droite D d'équation $y=2x-3$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$.
   c) Étudier la position de la courbe C par rapport à la droite D.
3. Déterminer f' la dérivée de la fonction f et prouver que, pour tout nombre réel x strictement positif : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.
4. À l'aide des résultats de la partie A, indiquer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1;2]$
   b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-4} de α.
6. Pour quelle valeur de x la courbe C admet-elle, au point d'abscisse x, une tangente parallèle à D ? 7. Construire avec soin la droite D et la courbe C (on utilisera une feuille de papier millimétré).

Partie C Dans cette partie, on souhaite calculer l'aire A, en cm^2 , du domaine E situé entre les droites d'équations $x=1$ et $x=5$, la courbe C et la droite D.

1. Hachurer le domaine E sur le graphique réalisé à **la partie B**.
2. Montrer que $A=\int_1^5 4\dfrac{\ln x}{x}\,dx$.
3. a) On pose, pour tout nombre réel x strictement positif, $H(x)=(\ln x)^2$.
   Déterminer la dérivée de la fonction H.
   b) Calculer la valeur exacte de A, puis en donner une valeur approchée au mm^2 près

www.guessmaths.co