Correction du sujet bac session rattrappage 2017

Exercice 1

(géométrie dans l'espace)

(P) : $y-z=0$

(S) : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$

1. *a)* $(\mathrm{S}): x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)+\left(z^2-2z+1\right)-3-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2^2$$

Donc c'est l'équation d'une sphère de centre Ω(1,1,1) est de rayon R=2.

b) $d(\Omega,(P))=\dfrac{|y_\Omega-z_\Omega|}{\|\vec{n_P}\|}=0$ *, donc le plan (P) passe par le centre de la sphère (S) et la coupe selon un cercle (C).*

b) puisque (P) coupe la sphère (S) au centre, donc le cercle (C) a pour centre Ω et pour rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}=R$ *le même rayon que (S).*

1. a) (Δ) perpendiculaire a (P) veut dire que tout vecteur directeur de (Δ) est normale à (P), d'où on a :

$$\left(\forall M\in(\Delta)\right)\quad \overrightarrow{AM}\perp(P)\Rightarrow(\exists k\in\mathbb{R})\ \ /\ \ \overrightarrow{AM}=k\vec{u}\left(\vec{u}\ \textit{est normal à}\ (\mathrm{P})\right)$$

donc $\vec{u}$ *est un vecteur directeur de (Δ).*

b) on a : $\overrightarrow{\Omega A}(0,-3,1)$ et $\vec{u}(0,1,-1)$

$$\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{i}$$

$$\textit{Donc}:\ \frac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\|2\vec{i}\|}{\|\vec{u}\|}\Rightarrow\frac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\textit{on conclue que}:\ \|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{2}\,\|\vec{u}\|$$

On en déduit que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points car :

$$\left(d(\Omega,(\Delta))=\frac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}<R\right)$$

c) les deux points intersection de (Δ) et (S) vérifient le système :

$$\begin{cases}M(x,y,z)\in(\Delta)\\ M(x,y,z)\in(S)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\exists k\in IR\ \ /\ \overrightarrow{AM}=k\vec{u}\\ x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\ y+2=k\\ z-2=-k\\ x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=1\\ y=k-2\\ z=2-k\end{cases}$$

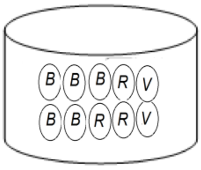
$$\Rightarrow 1^2+(k-2)^2+(2-k)^2-2\times 1-\underbrace{2(k-2)-2(2-k)}_{0}-1=0$$

$$\Rightarrow 2(k-2)^2=2 \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ k=1 \end{cases}$$

donc les points d'intersection de (Δ) *et* (S) *sont* : $\begin{cases} M_1(1,1,-1) \\ M_2(1,-1,1) \end{cases}$

Exercice 2

(les probabilités)



On tire de façon aléatoire simultanément 4 boules de l'urne. $Card\Omega = C_{10}^4 = 210$

I . *A « obtenir une et une seule boule Verte »*

B « obtenir exactement 3 boules de même couleur»

1- $\bullet CardA = C_2^1 \times C_8^3 = 112$

$$P(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{112}{210}$$

Donc : $P(A)=\dfrac{8}{15}$

- l'évenement B veut dire tirer 3 boules Blaches et une parmi les 5 boules non Blanches ou tirer 3 boules Rouges et une parmi les 7 boules non Rouges .

$CardB = C_5^3 \times C_5^1 + C_3^3 \times C_7^1 = 57$, $p(B)=\dfrac{CardB}{Card\Omega}=\dfrac{57}{210}$

Donc : $p(B)=\dfrac{19}{70}$

2. *X la variable aléatoire égale au nombre de boules Vertes tirées*

a) les valeurs que peut prendre X sont :

X	*0*	*1*	*2*
Les cas possibles	$\overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}$	$\overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}V$	$\overline{V}\,\overline{V}VV$

b) • $p(X=2)=\dfrac{C_8^2\times C_2^2}{210}=\dfrac{28}{210}=\dfrac{2}{15}$

On a : (X=1) est l'événement A ; Donc : $P(X=1)=\dfrac{8}{15}$

$\bullet P(X=0)=\dfrac{C_8^4}{210}=\dfrac{70}{210}=\dfrac{1}{3}$

Donc la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

$\sum_{i=0}^{2} p(X=x_i) =$

Exercice 3

(les nombres complexes)

1. a) Soit l'équation : $z^2+4z+8=0$

Le discriminant $\Delta = b^2-4ac = (4)^2 - 4\times1\times8$

$= 16-32 = -16$

On a $\Delta < 0$ *donc l'équation admet deux solutions complexes :*

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = -2+2i \qquad z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = -2-2i$$

D'où $S=\{-2-2i, -2+2i\}$

2. soit $a=-2+4i$, $b=4-4i$ *et* $c=4+8i$

a) On a $M' = R_{\left(A,-\frac{\pi}{2}\right)}(M)$ *Donc* : $(z'-a)=(z-a)e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$(z'-(-2+2i)) = -i(z-(-2+2i))$$
$$z'-(-2+2i) = -i(z+2-2i)$$
$$z' = -iz-2i-2-2+2i$$
$$z' = -iz-4$$

b) calculons l'affixe z'_C *de* $R(C)$

$$z' = -iz-4$$

Donc : $z'_C = -ic-4$

$= -i(4+8i)-4$

$= 4-4i = b$

$\boxed{\textit{Donc } z'_C = b \textit{ alors } R(C)=B}$

on a :

- $AB = |b-a| = |4-4i-(-2+2i)| = 6|1-i| = 6\sqrt{2}$
- $AC = |c-a| = |4+8i-(-2+2i)| = 6|1+i| = 6\sqrt{2}$

en plus $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}$ (*car* $B=R(C)$)

on conclue que le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

$$\Omega(\omega) \text{milieu de} [BC] \Leftrightarrow \omega = \frac{b+c}{2} = \frac{4-4i+4+8i}{2} = 4+2i$$

Donc : $|c-\omega| = |4+8i-(4+2i)| = |6i| = 6$

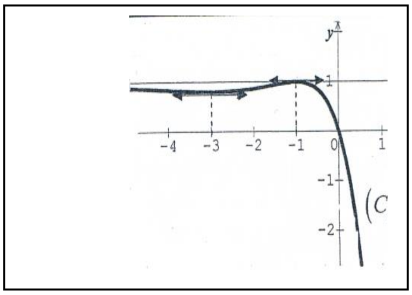
2.

b) on a : $\begin{cases} |z-\omega| = 6 \\ |c-\omega| = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S = \{M(z) / |z-\omega| = 6\} \text{ c'est le cerle de centre } \Omega \text{ et } R = 6 \\ C \in S \text{ et puisque } \Omega \text{ est le centre de } [AB] \end{cases}$

Donc S est le cercle qui circonscrit le triagle ABC.

Probléme *(Etude de fonction)*



I. $(\forall x \in IR)$ $g(x) = 1-(x+1)^2 e^x$

1. $g(0) = 1-(0+1)^2 e^0$

$= 1-1 = 0$

3. *on voit sur le graphique que pour $x \geq 0$ la courbe de g est au-dessous de l'axe des abscisses, et pour $x \leq 0$ la courbe de g est au-dessus de l'axe des abscisses.*

$(\forall x \in]-\infty, 0]) \; g(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in [0, +\infty[) \; g(x) \leq 0$

II. $(\forall x \in IR)$ $f(x) = x+1-(x^2+1)e^x$

1. a) montrons que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

on a : $x+1-(x^2+1)e^x = x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ *et* $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x \right) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x+1-(x^2+1)e^x - (x+1) \right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-(x^2+1)e^x \right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^2 e^x - e^x \right) = 0$

car : $\left. \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases} \right\rangle$ On déduit que la droite (D) d'équation $y = x+1$ est une asymptote oblique *à (C_f) au voisinage de $-\infty$.*

c) $f(x) - (x+1) = \left(x+1-(x^2+1)e^x - (x+1) \right) = -\underbrace{(x^2+1)}_{>0}\underbrace{e^x}_{>0}$

$\Rightarrow f(x) - (x+1) < 0.$

Donc (C_f) se trouve au dessous de la droite (D).

2. a) *On écrit f(x) sous la forme :* $x+1-(x^2+1)e^x = x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right) - \left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$$

$$et : \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]=-\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right] = -\infty$$

On déduit de a) et b) que (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées/

3. a) $(\forall x \in IR)\quad f'(x) = \left((x+1)-\left(x^2+1\right)e^x\right)'$

$$= 1-2xe^x-\left(x^2+1\right)e^x$$

$$= 1-\left(2x+x^2+1\right)e^x$$

$$= 1-(x+1)^2 e^x$$

$(\forall x \in IR)\quad f'(x) = g(x)$

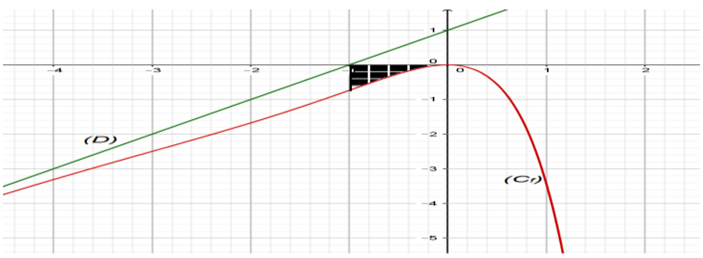
b) On a : $\begin{cases} (\forall x \in]-\infty,0])\ g(x) \geq 0 \\ \quad \Rightarrow f \text{ est croissante sur }]-\infty,0] \\ (\forall x \in [0,+\infty[)\ g(x) \leq 0 \\ \quad \Rightarrow f \text{ est décroissante sur } [0,+\infty[\end{cases}$

<u>Tableau de variation de f</u>

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

c) On $f''(x) = g'(x)$ d'après le graphique de g $g'(x)$ s'annule en (-1) et (-3) . Ce qui signifie que les points $(-1; f(-1))$ et $(-3; f(-3))$ sont des points d'inflexion pour (C_f)

4- construction de (C) et (T) dans le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$



5. Calculons $\mathrm{H}'(x)$.

$$\mathrm{H}'(x)=\left((x-1)e^{x}\right)'=e^{x}+(x-1)e^{x}=xe^{x}=h(x)$$

Donc la fonction H est une fonction primitive de la fonction h sur l'intervalle $]0,+\infty[$

b) on pose $\begin{cases} u(x)=\left(x^{2}+1\right) \Rightarrow u'(x)=2x \\ v'(x)=e^{x} \Rightarrow v(x)=e^{x} \end{cases}$

donc en integrant par partie on a :

$$\int_{-1}^{0}\left(x^{2}+1\right)e^{x}dx=\left[\left(x^{2}+1\right)e^{x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0} 2xe^{x}dx$$

$$=1-\frac{2}{e}-2\left(\frac{2}{e}-1\right)=3-3\times\frac{2}{e}$$

$$=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

alors on a : $\int_{-1}^{0}\left(x^{2}+1\right)e^{x}dx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$

c) soit A aire du domaine du plan délimité par (C_f), (D) et les droites x=-1 et x=0 , alors on a :

- $A=\int_{1}^{2}\left|f(x)-(x+1)\right| dx$

Comme on sait d'après les questions précédente que :

$$(\forall x\in IR)\ f(x)\leq(x+1)$$

Donc : $A=\left(\int_{-1}^{0}\left(x+1-f(x)\right) dx\right)u.a=\left(\int_{-1}^{0}\left(x^{2}+1\right)e^{x}\ dx\right)u.a$

$\left(\left(u.a=4cm^{2}\right) \text{ et } \int_{-1}^{0}\left(x^{2}+1\right)e^{x}\ dx\ \right)$

$A=\ 12\left(1-\frac{2}{e}\right)cm^{2}.$