EXERCICE 1:

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l' équation $(E): 2z^2 - \sqrt{3}\left(\sqrt{3}+i\right)z + \left(1+\sqrt{3}i\right) = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E'): 2z^8 - \sqrt{3}\left(\sqrt{3}+i\right)z^4 + \left(1+\sqrt{3}\ i\right) = 0$

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, On considère les points A et B d'affixe respectives $z_A = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_B = iz_A$. Soit I le milieu de $[AB]$

a) Donner la forme exponentielle de z_A et de z_B.

b) Placer les points A, B , et I dans le repère $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

4) a) Montrer que le triangle OAB est un triangle rectangle et isocèle

b) En déduire que $OI = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\left(\vec{u},\overrightarrow{OI}\right) \equiv \dfrac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

c) Ecrire z_I sous la forme algébrique et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 2

On considère les suites $(u_n)_{n\in IN}$ et $(v_n)_{n\in IN}$ définies par : $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $v_n = n\dfrac{\pi}{3}$

On désigne par M_n le point du plan d'affixe z_n définie par : $z_n = u_n e^{iv_n} = u_n(\cos v_n + i\sin v_n)$.

1°) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles z_n est réel.

2°) Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

(on prendra 4cm pour unité de longueur).

a) Représenter dans Ples points M_0 , M_1, M_2 , M_3 et M_4

b) Calculer en fonction de u_n les longueurs des trois côtés du triangle OM_nM_{n+1}. Quelle est la nature de ce triangle?

3°) Soit la suite $(a_n)_{n\in IN}$ définie par $a_n = |z_{n+1} - z_n|$

Montrer que cette suite est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
Déterminer sa limite.

EXERCICE 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ .unité graphique 1 cm.

Soient (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme u_1 positif et (θ_n) une suite arithmétique de raison $\dfrac{\pi}{3}$,de premier terme θ_1 . On désigne , pour tout n entier naturel non nul , par z_n le nombre complexe de module u_n et d'argument θ_n et par M_n le point d'affixe z_n

1°) a) Calculer sous forme trigonométrique z_1 ; z_2 et z_3 sachant que leur produit est égal à $8i$.

b) Construire les images M_n ,pour $n = 1 ; 2 ; 3$ et 4 dans le repère $\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$.

c) Calculer la distance M_1M_2 .

d) z_n peut-il être réel ? Pour la suite de l'exercice on prendra $u_1 = 1$.

2°) a) Donner la forme trigonométrique puis algébrique de $\frac{z_{n+1}}{z_n}$.

b) Exprimer alors z_{n+1} et $z_{n+1} - z_n$ en fonction de z_n .

c) En déduire la distance $M_{n+1}M_n$ en fonction de u_n