Exercice 1 : 3,5 pts

On considère les ensembles A et B suivants :

$$\mathrm{A}=\left\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \,/\, x^2+y^2=25\right\} \quad et \quad \mathrm{B}=\left\{(1,1);(4,3);(3,3);(0,5)\right\}$$

1) Montrer que $\mathrm{A}=\left\{(0,5);(5,0);(3,4);(4,3)\right\}$

2) Écrire en extension les ensembles suivants :

$$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\ ;\ \mathrm{A}\cup\mathrm{B}\ ;\ \mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}\ ;\ \mathrm{P}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$$

Exercice 2 : 7,5pts

On considère l'application f suivante : $\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2-x+1 \end{array}$

1) Déterminer $\overset{-1}{f}(\{0\})$; $\overset{-1}{f}(\{1\})$

2) f est – elle injective ? surjective ? justifier .

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}):\ f(x)\geq\dfrac{3}{4}$

b) Montrer que : $f(\mathbb{R})=\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right[$

4) On considère l'application g suivante : $\begin{array}{rcl} g: \left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[& \to & \left[\dfrac{3}{4},+\infty\right[\\ x & \to & x^2-x+1 \end{array}$

Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}

Exercice 3 : 5,5pts

On considère les ensembles E et F suivants :

$$F=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|\geq 2\right\} \quad et \quad \mathrm{E}=\left\{a+\frac{1}{a}\,/\,a\in\mathbb{R}^*\right\}$$

1) Vérifier que : $1\notin\mathrm{E}$ et que $\dfrac{4}{\sqrt{3}}\in\mathrm{E}$.

2) a) Montrer que : $(\forall a\in\mathbb{R}^*):\ \left|a+\dfrac{1}{a}\right|\geq 2$

b) En déduire que : $\mathrm{E}\subset F$

c) Montrer que : $\mathrm{E}=F$

Exercice 4 : 3,5pts

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $]1,+\infty[$ définie par : $f(x)=\dfrac{-1}{2}x+1+\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$

Et soit g l'application de $]1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=\dfrac{1}{4x-4}+1-x$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $g o f(x)=x$

2) Montrer que : $(\forall x\in]1,+\infty[)$: $f o g(x)=x$.

3) En déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1} .