EXERCICE 1

Soient f et g deux fonctions continues sur un fermé $[a;b]$ *; dérivables sur* $]a;b[$ *; telles que :* $f(a)=g(b)$ *;* $f(b)=g(a)$ *;* $(a<b)$.

1. *Montrer qu'il existe* $\alpha_0 \in [a;b]$ *tel que :* $f(\alpha_0)=g(\alpha_0)$.
2. *Montrer qu'il existe* $\alpha_1 \in]a;b[$ *tel que :* $f'(\alpha_1)=g'(\alpha_1)$.

EXERCICE 2

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. *Montrer que : si f est paire alors il existe :* $a \in \mathbb{R} / \ f'(a)=0$
2. *Montrer que : si f est impaire alors il existe :* $b \in \mathbb{R} / \ f''(b)=0$

EXRCICE 3

Soit $f:\ [0;1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que :* $f(0)=0$ *et* $f(1)=1$ *: On suppose que f est dérivable en 0 et en 1 et que* $f'(0)=f'(1)=0$.

Montrer qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ *tel que* $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}$.

On pourra utiliser la fonction $g:\ [0;1] \to \mathbb{R}$ *définie par :* $g(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x=0 \\ \dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{f(x)-1}{x-1} & si \quad 0<x<1 \\ 1 & si \quad x=1 \end{cases}$

En déduire que : $f(\alpha)=\alpha$

EXERCICE 4

Soit $f:\ [0;1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(0)=f(1)$.

Montrer qu'il existe $c \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ *telle que :* $f(c)=f\left(c+\dfrac{1}{2}\right)$

EXERCICE 5

Soit f la fonction $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & si \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$

Monter qu'il existe $c \in]0;2[$ *tel que :* $f(2)-f(0)=2f'(c)$

Déterminer les valeurs possibles de c .